

Examen de TD(3) du 5 janvier 2005

Durée : 1,5 heure(s)

Aucun document autorisé - Calculatrice autorisée.

Exercice 1 (Interpolation). Soit la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1 + 4x^2}.$$

On pose

$$n = 2,$$

$h = 2/n$ et pour $i \in \{0, \dots, n\}$, $x_i = -1 + ih$. On considère le polynôme p_n d'interpolation de f sur le support $\{x_0, \dots, x_n\}$. Déterminer numériquement la valeur de $p_n(0,99)$.

Exercice 2 (Intégration). On considère l'intégrale suivante

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx.$$

En utilisant la formule d'intégration de Gauss-Hermite à $n + 1$ points et la table 1 page suivante, déterminer la valeur approchée de I pour $n \in \{2, 3, 4\}$.

Attention, on rappelle que les points et les poids sont symétriques par rapport à zéro : dans la table 1, ne figurent que les points d'abscisse positives ou nulles .

Exercice 3 (Équations non linéaires). On cherche à résoudre $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a, b]$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos x - \sin^2 x,$$

et $[a, b] = [0, \pi/2]$.

Déterminer les premières valeurs des x_n de la méthode de dichotomie sur $[a, b]$ de façon que l'erreur commise soit inférieure à 10^{-1} .

x_i	W_i
$n = 2$	
0.00000 00000 00000	1.18163 59006 03678
1.22474 48713 91589	0.29540 89751 50919
$n = 3$	
0.52464 76232 75290	0.80491 40900 05513
1.65068 01238 85784	0.81312 83544 72452 10^{-1}
$n = 4$	
0.00000 00000 00000	0.94530 87204 82942
0.95857 24646 13819	0.39361 93231 52241
2.02018 28704 56086	0.19953 24205 90459 10^{-1}

TAB. 1 – Quelques valeurs des x_i (positifs) et des W_i associés pour la méthode de Gauss-Hermite.