

Corrigé de l'examen de TD(3) du 30 novembre 2005

Le corrigé est succinct, mais on pourra consulter les corrigés matlab proposés en ligne à l'adresse habituelle <http://utbmjb.chez-alice.fr/>

On pourra aussi consulter et faire tourner les fichiers matlab `diff_div_dist`, `eval_horner`, `int_fcn` et `iteration_dichotomie`.

Correction de l'exercice 1.

Soit la fonction f définie par

$$\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \quad f(x) = \tan x.$$

On considère le polynôme p_3 d'interpolation de f sur le support $\{0; 0, 3; 0, 6; 1\}$.

Nous trouvons après calcul

$$p_3(x) = 1.031x + 0.3636x(x - 0, 3) + 0.9703x(x - 0, 3)(x - 0, 6),$$

et

$$p_3(0, 25) = 2.57479 \times 10^{-1}.$$

Correction de l'exercice 2.

Soit

$$I = \int_{-1}^1 e^x dx.$$

1. En utilisant la formule d'intégration (composée) de Simpson à N sous intervalles ($x_i = A + ih$, $A = -1$, $B = 1$ et $h = (B - A)/N$) :

$$I_N^S = \frac{h}{6} \left(f(A) + f(B) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \right),$$

nous trouvons

$$I_2^S = 2.351194831880255,$$

$$I_3^S = 2.350561486811035,$$

$$I_4^S = 2.350453017242280.$$

2. la valeur exacte vaut $I = e - 1/e$ et on obtient donc

$$\begin{aligned} |I - I_2^S| &\approx 7.9244 \times 10^{-4}, \\ |I - I_3^S| &\approx 1.5909 \times 10^{-4}, \\ |I - I_4^S| &\approx 5.0629 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

3. D'après la formule du cours, on a

$$E_N^S = -h^4 \frac{(B-A)}{2880} f^{(4)}(\eta) \text{ avec } \eta \in [A, B].$$

On a $f^{(4)} = f$ et on peut majorer $|f^{(4)}(\eta)|$ sur $[-1, 1]$ par e et donc

$$|E_N^S| \leq \frac{h^4}{1440} e,$$

et pour avoir $|E_N^S| \leq \varepsilon = 10^{-3}$, il suffit que

$$h \leq \sqrt[4]{\frac{1440\varepsilon}{e}},$$

soit

$$N \geq 2 \sqrt[4]{\frac{e}{1440\varepsilon}},$$

ce qui donne numériquement

$$\boxed{N \geq 3,}$$

ce qui est plus pessimiste que les résultats de la question 2.

Correction de l'exercice 3.

| n | x_n |
|-----|--------------|
| 0 | 0.5 |
| 1 | 0.25 |
| 2 | 0.375 |
| 3 | 0.4375 |
| 4 | 0.46875 |
| 5 | 0.484375 |
| 6 | 0.4765625 |
| 7 | 0.48046875 |
| 8 | 0.478515625 |
| 9 | 0.4794921875 |

TAB. 1 – Les valeurs de x_n pour $n \in \{0, \dots, 9\}$.

Nous donnons dans le tableau 1, les valeurs de x_n pour $n \in \{0, \dots, 9\}$.