

Introduction au cours

Le chapitre 1 de l'ouvrage de cours (seulement évoqué en TD) est consacré à deux notions de bases de l'analyse numérique : la représentation des nombres réels et une introduction à la complexité des algorithmes, notion qui permettra de quantifier leurs performances comparées.

Le chapitre 2 traite de l'interpolation polynômiale ou «comment faire passer un polynôme par un nuage de point donné?». Cette notion s'appuie sur le concept de différences divisées qui a conduit à l'invention de la notion de dérivée ; cela permet aussi d'envisager un calcul par récurrence sur le nombre de point. on étudie aussi l'erreur commise lors de l'interpolation d'une fonction connue par une fonction polynôme à partir d'un certain nombre de points donnés qui constituent le support d'interpolation.

Grâce à cette notion d'interpolation, il est donc possible de «remplacer» une fonction donnée f par une fonction polynômiale, définie grâce au support ; cette fonction polynôme interpolante peut être dérivée ou intégrée, ce qui n'était pas nécessairement le cas de f . De plus, l'erreur commise peut être déterminée, ou majorée. On pourra donc approcher l'intégrale d'une fonction sur un intervalle donné par l'intégrale de la fonction polynômiale interpolante, tout en majorant l'erreur commise. Tel sera l'objet du chapitre 3. La première partie est consacrée à l'étude des formules simples d'intégration. Dans un second temps, nous généraliserons et verrons comment décomposer l'intégrale proposée en une somme finie d'intégrales, dont chacune est approchée grâce aux résultats issus de l'étude des formules simples ; ceci conduit à des formules dites composées. Dans le cas des formules classiques, le support des points d'interpolation est fixé à l'avance. On peut aussi étudier comment le choix de ce support de points permet de diminuer l'erreur d'intégration, ce qui constitue l'un des enjeux des méthodes d'intégration gaussiennes. La dernière partie du chapitre 3 est consacré au calcul des dérivées approchées d'une fonction connue seulement sur un ensemble discret, en majorant l'erreur commise.

Le chapitre 4 est consacré à la résolution numérique d'équations non linéaire, dans le cas d'une fonction réelle d'une variable réelle. Nous évoquons tout d'abord la notion de vitesse de convergence d'une suite ; il s'agit là d'une problématique majeure du numéricien, attaché à l'économie de moyens et à la qualité des calculs approchés produits. Nous montrons ensuite qu'on peut définir par récurrence une suite convergeant, sous certaines hypothèses, vers une solution d'une équation donnée : c'est la méthode du point fixe. Le défaut de cette méthode du point fixe est de converger «lentement» au sens précédent ; on cherche donc à accélérer la convergence. L'accélération de convergence est fondée encore sur l'interpolation polynômiale. Apparemment différentes, mais réunies par l'intervention du concept d'interpolation, deux méthodes usuelles de résolution (Lagrange et Newton, sont alors étudiées simultanément et leurs performances respectives comparées . Pour ce faire, nous utiliserons encore les outils de l'interpolation polynômiale. Quelques compléments sont proposés en fin de chapitre.

Le dernier chapitre (chapitre 5) traite de la résolution d'un type générique d'équations différentielles du premier ordre. Ce chapitre pourrait apparaître dissocié des quatre premiers ; il n'en est rien. D'une part, cette problématique représente, comme les autres notions étudiées, une des bases de l'analyse numérique. D'autre part, on retrouvera des notions vues précédemment, notamment le lien entre ordre local et global, rencontré déjà dans la notion d'ordre de convergence pour les méthodes d'intégrations simples et composées. Nous étudierons de façon complète une des méthodes les plus simples de résolution, due à Euler. Cette méthode présente un grand intérêt heuristique car elle permet de comprendre dans un cas simple, les notions de consistance, de stabilité et de convergence d'un schéma de résolution. Un autre type de schéma, beaucoup plus performant, est évoqué sans aller jusqu'à son étude complète, celui de Runge-Kutta.