MT40 Automne 2002

Examen médian du 13 novembre 2002

Durée : deux heure(s)

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes.

Exercice 1 (Extension de la notion de différences divisées)**.**
Dans cet exercice, on montre qu'il est possible d'étendre la notion de différences divisées ainsi que celle de polynôme interpolateur à un support $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ quelconque.
On étudiera d'abord le cas $n = 1$, ensuite $n = 2$. Pour le cas où n est quelconque, on donnera seulement un plan d'étude.
Soit I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ contenant les x_0, x_1 ..., x_n.

1. On suppose que $n = 1$ pour cette question. Soit F la fonction de I dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto f[x_0, x]$.
   (a) Quel est le domaine de définition de F ?
   (b) Étude de F au voisinage de x_0.
   Sous quelle hypothèse H_1 portant sur f, F admet-elle une limite en x_0 ? Quelle est cette limite ? On la note $f[x_0, x_0]$; pourquoi ?
   On suppose désormais que H_1 est vérifiée dans la suite de cette question.
   (c) Montrer que l'on vient de donner un sens à l'expression $f[x_0, x]$ pour tout x de I.
   (d) Montrer
   $$f[x_0, x] = f[x, x_0].$$
   (e) Existence et unicité du polynôme d'interpolation.
      (i) Montrer que, pour tout support $\{x_0, x_1\}$, f admet un polynôme d'interpolation p_1.
      (ii) Fournir son expression selon que x_0 est différent de x_1 ou non.
      (iii) Quelles sont ses propriétés lorsque $x_0 = x_1$?
      (iv) L'unicité de p_1 est-elle assurée ?
2. On suppose $n = 2$ dans cette question.

(a) On considère deux éléments distincts de I, notés x_0 et x_2. Soit G la fonction de I dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto f[x_0, x, x_2]$

  (i) Quel est le domaine de définition de G ?

  (ii) Étude de G au voisinage de x_0.
  Montrer que sous l'hypothèse H_1, G admet une limite au voisinage de x_0. Quelle est-elle ? On la note $f[x_0, x_0, x_2]$; pourquoi ?

  (iii) Étudier de même G au voisinage de x_2.

  (iv) En déduire qu'on a donné un sens aux expressions $f[x_0, x_0, x_2]$ et $f[x_0, x_2, x_2]$. Montrer que ces expressions peuvent être également obtenues au moyen des relations de récurrence sur les différences divisées vues en cours.

(b) On suppose que f vérifie l'hypothèse H_1. Soit K de I dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto f[x_0, x_0, x]$.

  (i) Quel est le domaine de définition de K ?

  (ii) Étude au voisinage de x_0.
  Sous quelle hypothèse H_2 portant sur f, K admet elle une limite en x_0. Quelle est cette limite ? On la note $f[x_0, x_0, x_0]$. ; pourquoi ?

(c) Bilan
Fournir une définition générale de $f[x_0, x_1, x_2]$ quel que soit le support.
Montrer que pour toute permutation σ de $\{0, 1, 2\}$, on a

$$f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] = f[x_0, x_1, x_2].$$

(d) Existence et unicité du polynôme d'interpolation.

  (i) Montrer que, pour tout support $\{x_0, x_1, x_2\}$, il existe un polynôme d'interpolation p_2 pour f.

  (ii) Fournir son expression suivant que les points x_0, x_1 et x_2 sont ou non confondus.

  (iii) Quelles sont ses propriétés lorsqu'un point du support est multiple ?

  (iv) L'unicité de p_2 est-elle assurée ?

3. Dans cette question, on repondra succintement et sans preuve.

(a) Au vu des questions 1 et 2, proposer un plan d'étude pour les définitions successives (et dans cet ordre) :
  - de la différence divisées généralisée $f[x_0, ..., x_n]$ pour un support quelconque $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ (on pourra procéder par récurrence) ;
  - du polynôme d'interpolation p_n de f sur le support $f[x_0, x_1, ..., x_n]$;
  - de la notion d'interpolation.

(b) Citer les propriétés du cours relatives au polynôme d'interpolation p_n et des différences divisées $f[x_0, x_1, ..., x_n]$ qui vous semblent rester valables pour un support quelconque.
Lesquelles vous semblent-elles pouvoir se démontrer de la même façon ?

Exercice 2 (Intégration numérique).
On se propose de calculer numériquement l'intégrale d'une fonction f d'un intervalle fermé borné $[A, B]$ dans $\mathbb{R}$ par une méthode composée (cette méthode n'a pas été vue en cours, mais elle est détaillée ici).

1. Étude de la méthode de Gauss-Legendre à trois points sur $[-1, 1]$.

   Dans cette question, g est une fonction de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^6.

   (a) Calculer le polynôme de Legendre L_3 et en déduire les expressions analytiques des points (x_0, x_1, x_2) et des poids (D_0, D_1, D_2). On pourra utiliser les résultats vus en Travaux Dirigés : si les x_i sont distincts,

$$\begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{-1}^{1} dx \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} x dx \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 dx \end{pmatrix}$$

   et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} & -\dfrac{x_1 + x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} & \dfrac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ \dfrac{x_0 x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} & -\dfrac{x_0 + x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} & \dfrac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ \dfrac{x_0 x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} & -\dfrac{x_0 + x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} & \dfrac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{pmatrix}.$$

   (b) Rappeler l'expression de l'intégrale approchée de g sur $[-1, 1]$ et de l'estimation de l'erreur méthodique commise.

2. Étude de la méthode de Gauss-Legendre à trois points sur $[a, b]$.

   Dans cette question, a et b sont deux réels ($a < b$) et f est une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^6. Par un changement de variable approprié, montrer en utilisant les résultats de la question 1, que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{2} D_i f\left(\frac{b-a}{2} x_i + \frac{a+b}{2}\right), \tag{1}$$

   avec une erreur

$$E_{\text{méth}} = \alpha (b-a)^7 f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in [a, b], \tag{2}$$

   où α est une constante numérique à déterminer.

3. Étude d'une méthode composée sur $[A, B]$.

On considère maintenant un «grand» intervalle $[A, B]$ et f une fonction de classe C^6 sur $[A, B]$. On découpe $[A, B]$ en $N \in \mathbb{N}^*$ sous intervalles :

$$h = \frac{B - A}{N} \text{ et, pour tout } i \in \{0, ..., N\},\ a_i = A + ih.$$

Sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, on remplacera l'intégrale exacte de f par l'intégrale approchée issue de la question 2.

(a) Déterminer la valeur approchée de l'intégrale de f sur $[A, B]$ par cette méthode.

(b) Montrer que l'erreur méthodique s'écrit :

$$E_{\text{méth}} = \alpha h^7 \sum_{i=0}^{N} f^{(6)}(\xi_i),\ \text{ où } \xi_i \in [a_i, a_{i+1}]. \tag{3}$$

Pourquoi peut on mettre cette erreur sous la forme :

$$E_{\text{méth}} = \alpha h^6 (B - A) f^{(6)}(\xi),\ \text{ où } \xi \in [A, B]\ ? \tag{4}$$

(c) Comparer cette méthode avec la méthode de Simpson, en terme de
- Degré du polynôme d'interpolation sur chaque sous-intervalle $[a_i, a_{i+1}]$;
- Nombre de calculs ;
- Erreur (pour ce point, on calculera le gain apporté par cette méthode composée par rapport à celle de Simpson).