

Examen médian du 17 novembre 2004
--

Durée : deux heure(s)

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes.

Exercice 1 (Interpolation).

On considère une fonction f telle que, pour $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, on ait

$$f(0) = 1,$$

$$f(1) = 5,$$

$$f(2) = 6,$$

$$f(3) = 7,$$

$$f(4) = 11.$$

1. Soit p_4 le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Déterminer $p_4(2, 5)$.
2. On note p_0, p_1, p_2 et p_3 les polynômes d'interpolation de f sur les supports respectifs $\{x_0\}$, $\{x_0, x_1\}$, $\{x_0, x_1, x_2\}$ et $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$. Représenter graphiquement dans un même repère les points $M_i(x_i, f(x_i))$ ainsi que les fonctions p_0, p_1, p_2 et p_3 . On représentera ces fonctions sans calculs, en utilisant seulement leurs propriétés.
3. Quelle la valeur de la différence divisées $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$? Que peut-on en déduire?
4. (a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur f pour que l'erreur $e_3 = f - p_3$ soit identiquement nulle.
(b) Cette condition est-elle respectée ici?
(c) Si cette condition est vérifiée, quelle est l'expression de f ?

Exercice 2 (Intégration numérique).

On se propose d'étudier la qualité de l'intégration de Simpson pour le calcul approché de :

$$I = \int_1^2 f(x)dx \quad \text{où} \quad f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

On utilise les notations du cours; on pourra admettre tout résultat intermédiaire pour poursuivre la résolution de l'exercice.

1. Calculer I directement.

2. Etude de l'erreur de méthode E_N^S commise en intégration de Simpson

(a) Montrer que f est C^4 sur $[1, 2]$ et déterminer un majorant de $|f^{(4)}|$ sur $[1, 2]$.

(b) Déterminer en fonction de ε ($\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$) le plus petit entier naturel N permettant d'affirmer que : $|E_N^S| < \varepsilon$.

(c) En déduire, en fonction de ε , le pas h associé à N , défini par : $Nh = 1$.

(d) Applications numériques :

Pour i élément de $\{1, 2, 3\}$ déterminer N_i et h_i associés à ε_i sachant que :

$$\varepsilon_1 = 10^{-2}; \quad \varepsilon_2 = 10^{-4}; \quad \varepsilon_3 = 10^{-6}.$$

3. On se propose d'étudier désormais I_N^S la valeur approchée, obtenue par méthode de Simpson, de l'intégrale I .

(a) Lemmes techniques

Soit k un élément de \mathbb{N}^* . On définit $S(k)$ par :

$$S(k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2}.$$

On admettra qu'il existe une fonction connue, appelée fonction gamma de deuxième espèce, permettant de calculer $S(k)$; par suite on tentera d'écrire toutes les quantités utiles à l'expression de I_N^S en fonction de termes de la forme $S(k)$.

On note $\mathcal{I}(k)$ [respectivement $\mathcal{P}(k)$] la sous-somme de $S(k)$ des inverses de carrés des seuls entiers i impairs [respectivement pairs]; autrement dit :

$$\mathcal{I}(k) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^k \frac{1}{i^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(k) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ pair}}}^k \frac{1}{i^2}.$$

(i) Fournir par un calcul direct : $S(4)$, $\mathcal{I}(4)$ et $\mathcal{P}(4)$. Vérifier que : $S(4) = \mathcal{I}(4) + \mathcal{P}(4)$.

(ii) Montrer qu'on peut écrire :

$$\mathcal{P}(k) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{E(k/2)} \frac{1}{j^2} \quad \text{où } E(k/2) \text{ désigne la partie entière de } k/2.$$

(iii) En déduire que :

$$\mathcal{P}(k) = \frac{1}{4} S(E(k/2)) \quad \text{d'où} \quad \mathcal{I}(k) = S(k) - \frac{1}{4} S(E(k/2)).$$

(iv) Pour tout entier naturel non nul N on pose :

$$K_1 = \sum_{i=2N}^{4N} \frac{1}{i^2} \quad \text{et} \quad K_2 = \sum_{\substack{i=2N \\ i \text{ impair}}}^{4N} \frac{1}{i^2}.$$

Montrer que :

$$K_1 = S(4N) - S(2N - 1) \quad \text{et que} \quad \sum_{\substack{i=2N \\ i \text{ pair}}}^{4N} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{4} [S(2N) - S(N - 1)].$$

En déduire que :

$$K_2 = S(4N) - S(2N - 1) - \frac{1}{4} [S(2N) - S(N - 1)].$$

(b) Utilisation pour le calcul de I_N^S

Soit N un entier naturel non nul et h le pas d'intégration sur $[1, 2]$ associé, c'est-à-dire que : $Nh = 1$. Pour tout i de $\{1, \dots, 4N\}$, on pose :

$$X_i = i \frac{h}{2}.$$

(i) Montrer que $X_{2N} = 1$, $X_{4N} = 2$ et $f(X_i) = \frac{4}{h^2} \frac{1}{i^2}$.

(ii) Montrer que I_N^S peut s'écrire :

$$I_N^S = \frac{h}{6} \left[\left\{ 2 \left(\sum_{i=2N}^{4N} f(X_i) \right) - f(1) - f(2) \right\} + 2 \sum_{\substack{i=2N \\ i \text{ impair}}}^{4N} f(X_i) \right]$$

c'est-à-dire :

$$I_N^S = \frac{h}{6} \left[\left\{ 2 \frac{4}{h^2} K_1 - 1 - \frac{1}{4} \right\} + 2 \frac{4}{h^2} K_2 \right] \quad \text{soit} \quad I_N^S = \frac{h}{6} \left[\frac{8}{h^2} (K_1 + K_2) - 1 - \frac{1}{4} \right].$$

(iii) En déduire l'écriture finale de I_N^S :

$$I_N^S = \frac{1}{6N} \left[8N^2 \left\{ 2S(4N) - 2S(2N - 1) - \frac{1}{4} [S(2N) - S(N - 1)] \right\} - \frac{5}{4} \right].$$

(c) Applications numériques

On fournit grâce aux tables suivantes, les valeurs de S en les points k indiqués :

k	1	3	4	8
$S(k)$	1.00000000	1.36111111	1.42361111	1.52742205

k	9	10	14	20
$S(k)$	1.53976773	1.54976773	1.57599584	1.59616324

k	29	30	60
$S(k)$	1.61103901	1.61215012	1.62840552

Donner les trois valeurs approchées de I obtenues à partir des N_i déterminés dans la question 2d. Vérifier qu'elles sont cohérentes avec la précision attendue.

(d) Prolongement...

En utilisant les outils développés dans mt40, quelle méthode proposeriez-vous pour déduire des trois évaluations de I_N^S en $\{N_1, N_2, N_3\}$ la valeur en un point N quelconque ? Critiquez la solution proposée.