

Corrigé de l'examen médian du 12 novembre 2003

Correction de l'exercice 1.

Cette correction faite au vu des copies insiste surtout sur les difficultés rencontrées.

1. *Interpolation sur* $S_1 = \{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$

(a) Il convient de noter que la solution consiste à fournir une table des différences divisées, dont le créateur indique les conventions de précision, sachant que les calculs ne sont pas tronqués de façon sauvage et recopiés tronqués de cases en cases, mais transmis par mémoire afin d'éviter toute erreur d'arrondi excessive. Fournir une table en valeurs exactes n'a pas grand sens numérique dans une uv comme mt40...

- Calculer numériquement n'est pas honteux !
- Fournir des valeurs exactes n'a pas de sens en pratique car des logiciels se saisiront des valeurs calculées pour déterminer un polynôme d'interpolation par exemple et ils attendront des valeurs numériques.
- Enfin, dans bon nombre d'applications, les valeurs de la fonction à interpoler ne seront pas issues de fonctions «mathématiques» mais seront des résultats de mesures, évidemment connus par leurs valeurs approchées...

On produit donc une table des valeurs approchées de exponentielle du type suivant :

x_i	$f[x_i]$	$f[\quad , \quad]$	$f[\quad , \quad , \quad]$	$f[\quad , \quad , \quad , \quad]$
-1	0,3679			
		0,5230		
$-\frac{1}{3}$	0,7165		0,3717	
		1,019		0,1762
$\frac{1}{3}$	1,396		0,7240	
		1,984		
1	2,718			

sachant que les calculs sont transférés par mémoire, sans troncature, et affichés dans la table avec quatre chiffres significatifs. On déduit de cette table, l'expression du polynôme $p_{3,1}$:

$$p_{3,1}(x) = 0,3679 + 0,5230(x+1) + 0,3717(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right) + 0,1762(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right).$$

(b) L'expression de l'erreur est donnée en cours par :

$$e_1(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \left(\prod_{i=0}^3 (x - x_i) \right).$$

(c) Par suite on déduit que :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad |e_1(x)| \leq |M_1(x)| \quad \text{avec} \quad M_1(x) = \frac{e}{24} (x^2 - 1) \left(x^2 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right).$$

En effet f est invariante par dérivation, positive et croissante (puisque de dérivée positive) sur $[-1, 1]$; par conséquent $\left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \right|$ est majoré par $e/24$.

2. Interpolation sur le support $S_2 = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(3\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(5\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(7\frac{\pi}{8}\right) \right\}$

- (a) On laisse au lecteur le soin de représenter les deux supports (voir remarque 2 page suivante). Ce qui les différencie (avec un c, excuses!) : S_1 est régulièrement réparti puisque les points sont équidistants, de distance $2/3$, tandis que S_2 ne l'est pas. Plus précisément, les points de S_2 sont choisis de telle sorte qu'ils «représentent» mieux les bords de l'intervalle comme le cours le suggérait en vue d'harmoniser l'amplitude de la valeur absolue de l'erreur d'interpolation sur un intervalle.
- (b) L'expression est la même qu'à la question antérieure en remplaçant les points x_i par les nouveaux points X_i .
- (c) L'erreur $e_2(x)$ vérifie comme antérieurement, sous les notations de l'énoncé :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad |e_2(x)| \leq |M_2(x)| \quad \text{avec} \quad M_2(x) = \frac{e}{24} (x^2 - \alpha^2) (x^2 - \beta^2).$$

Remarque 1. Il convient de noter que les expressions de $M_1(x)$ et $M_2(x)$ sont les mêmes avec des variantes quant à la valeur de α et β .

3. Comparaison des majorants $|M_1|$ et $|M_2|$

- (a) On étudie les variations des fonctions M_1 et M_2 . Nous proposons ci-dessous une seule étude finalement tant les deux sont similaires.
- M_1 et M_2 sont définies, continues, dérivables sur $[-1, 1]$ comme fonctions polynômes. Elles sont évidemment paires sur leur domaine de définition donc on les étudie seulement sur l'intervalle $[0, 1]$.
 - Variations

$$M_2'(x) = \frac{e}{24} [2x(x^2 - \beta^2) + 2x(x^2 - \alpha^2)] = \frac{ex}{6} \left[x^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right].$$

On remarque, dans le cas de M_2 , que les vu les arguments complémentaires qui interviennent :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(3\frac{\pi}{8}\right) = 1$$

Le cas de $M'_1(x)$ est exactement le même en changeant de α et β . Ainsi

$$M'_1(x) = \frac{ex}{6} \left[x^2 - \frac{(1)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} \right] = \frac{ex}{6} \left[x^2 - \frac{5}{9} \right].$$

L'étude de signe est triviale puisqu'elle se ramène à l'étude de celui d'un trinôme du deuxième degré. Nous en déduisons les deux tableaux de variations suivants :

x	0	$\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$	1
$M'_1(x)$	0	-	0
$M_1(x)$	$M_1(0)$	\searrow	$M_1\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$
		\nearrow	0

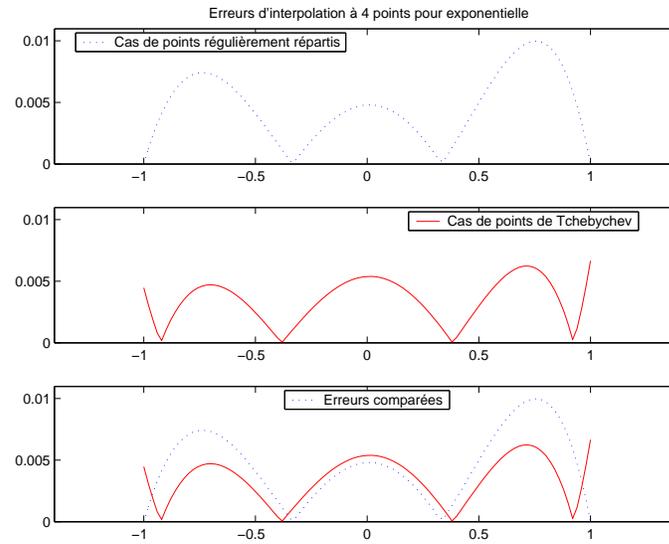
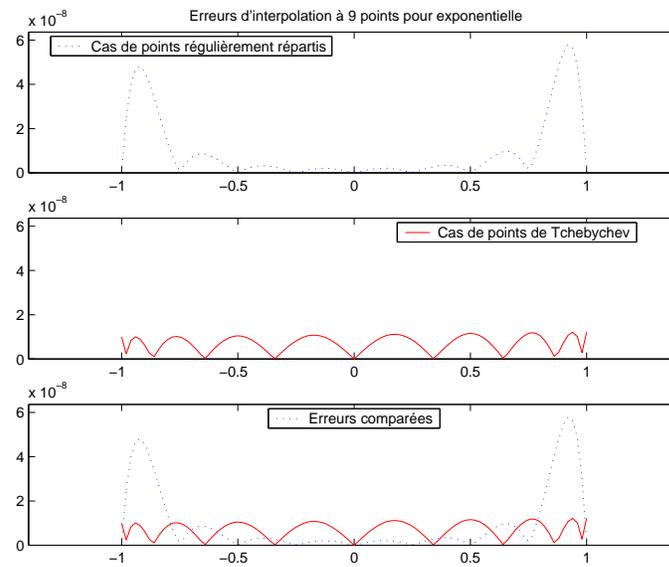
de même on obtient :

x	0	$\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$M'_2(x)$	0	-	0
$M_2(x)$	$M_2(0)$	\searrow	$M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
		\nearrow	$M_2(1)$

On calcule des valeurs approchées des bornes prises en compte dans les tableaux précédents d'où on déduit un majorant de $|e_1(x)|$ et $|e_2(x)|$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

- (b) On constate que $|e_1(x)|$ est majoré par $m_1 = 0,0224$ sur $[-1, 1]$, tandis que $|e_2(x)|$ est majoré par $m_2 = 0,0142$ sur le même intervalle, soit un rapport de 1 à 1,6 environ. Le résultat trouvé va dans le sens du résultat annoncé en cours relatif à l'effet bénéfique des points de Tchebychev qui uniformisent l'erreur d'interpolation.

Remarque 2. On pourra consulter le TP 2.C de [BM03] et faire tourner le fichier matlab (disponible sur le site de Dunod) `etude_support`. On choisira $a = -1$, $b = 1$ et pour retrouver les données de l'exercice choisir $n = 3$ (voir la figure 1 page suivante). On pourra choisir des valeurs plus grandes de n (voir par exemple la figure 2 page suivante correspondant à $n = 8$).

FIG. 1 – cas où $n = 3$.FIG. 2 – cas où $n = 8$.

Correction de l'exercice 2.

On étudie la méthode élémentaire de quadrature suivante :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n W_i f(x_i) + E_n(a, b, f). \quad (1)$$

Pour tout cet exercice, on pose

$$h = b - a.$$

1. Si l'assertion

Il existe $\alpha \geq 0$ tel que, pour toute fonction $f \in C^{m+1}[a, b]$,

$$|E_n(a, b, f)| \leq \alpha h^{m+2} \sup_{x \in [a, b]} |f^{(m+1)}(x)|, \quad (2)$$

est vérifiée et si on choisit f de degré au plus m , alors $\sup_{x \in [a, b]} |f^{(m+1)}(x)| = 0$ et l'assertion

$$\text{La formule de quadrature (1) est d'ordre } m, \quad (3)$$

est évidemment vraie.

2. Soit $f \in C^{m+1}[a, b]$.

On décompose la preuve en plusieurs étapes.

- La formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction f sur l'intervalle $[a, x]$, de classe C^{m+1} donne : pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi_x \in [a, x]$ tel que

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \dots + \frac{(x - a)^m}{m!} f^{(m)}(a) + \frac{(x - a)^{m+1}}{(m + 1)!} f^{(m+1)}(\xi_x),$$

que l'on réécrit sous la forme

$$\boxed{\forall x \in [a, b], \quad f(x) = p_m(x) + g(x)}, \quad (4)$$

où est un polynôme de degré au plus m et où

$$\boxed{g(x) = \frac{(x - a)^{m+1}}{(m + 1)!} f^{(m+1)}(\xi_x)}, \quad (5)$$

où ξ_x est un réel de $[a, b]$ et dépendant de x .

- Supposons maintenant que (3) a lieu. Par définition, on a

$$E_n(a, b, f) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^n W_i f(x_i);$$

puisque $f = p_m + g$, on en déduit par linéarité

$$E_n(a, b, f) = \left(\int_a^b p_m(x) dx - \sum_{i=0}^n W_i p_m(x_i) \right) + \int_a^b g(x) dx - \sum_{i=0}^n W_i g(x_i).$$

Le terme entre parenthèses est nul, puisque la méthode est exacte pour les polynômes de degré au plus m (selon (3)). On a donc, sous l'hypothèse (3) :

$$\boxed{E_n(a, b, f) = \int_a^b g(x) dx + \sum_{i=0}^n W_i g(x_i)}. \quad (6)$$

- On écrit

$$\left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b \frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi_x) dx \right| \leq \frac{\sup_{x \in [a,b]} |f^{(m+1)}(x)|}{(m+1)!} \int_a^b (x-a)^{m+1} dx.$$

Puisque la dernière intégrale est égale à

$$I = \left[\frac{(x-a)^{m+2}}{m+2} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{(b-a)^{m+2}}{m+2} = \frac{h^{m+2}}{m+2},$$

on a

$$\boxed{\left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq \alpha_1 h^{m+2} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(m+1)}(x)|,} \quad (7)$$

où

$$\alpha_1 = \frac{1}{(m+2)!},$$

est indépendant de a , b , h et f .

- On admet que, selon l'hypothèse

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad x_i = a + h\tau_i, \quad (8)$$

il existe $(\widetilde{W}_i)_{0 \leq i \leq n}$, $n+1$ réels deux à deux distincts, indépendants de a , b et h , tels que

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad W_i = h\widetilde{W}_i. \quad (9)$$

On pourra en voir la preuve en annexe A, page 12.

Par définition de g , on peut écrire successivement :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^n W_i g(x_i) \right| &= \left| \sum_{i=0}^n W_i \frac{(x_i - a)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi_{x_i}) \right|, \\ &\leq \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i=0}^n |W_i| |(x_i - a)^{m+1}| |f^{(m+1)}(\xi_{x_i})|, \\ &\leq \sup_{x \in [a,b]} |f^{(m+1)}(x)| \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{i=0}^n |W_i|. \end{aligned}$$

D'après (9), on a donc

$$\left| \sum_{i=0}^n W_i g(x_i) \right| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f^{(m+1)}(x)| \frac{h^{m+2}}{(m+1)!} \sum_{i=0}^n |\widetilde{W}_i|.$$

Ainsi, on en déduit

$$\boxed{\left| \sum_{i=0}^n W_i g(x_i) \right| \leq \alpha_2 h^{m+2} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(m+1)}(x)|,} \quad (10)$$

où

$$\alpha_2 = \frac{\sum_{i=0}^n |\widetilde{W}_i|}{(m+1)!}, \quad (11)$$

est indépendant de a, b, h et f .

- Ainsi, selon (6), (7) et (10), l'hypothèse (3) implique

$$\boxed{|E_n(a, b, f)| \leq (\alpha_1 + \alpha_2) h^{m+2} \sup_{x \in [a, b]} |f^{(m+1)}(x)|}, \quad (12)$$

c'est-à-dire (2).

Remarque 3. En résumé, nous avons démontré l'équivalence de (2) et de (3). Dans le cours, pour étudier l'erreur d'une méthode de quadrature élémentaire, nous utilisons le polynôme p_n d'interpolation de f sur le support $\{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ choisi et nous étudions l'expression de l'erreur donnée par :

$$E_n = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx. \quad (13)$$

On consultera les corollaires 3.4 et 3.6 la section 3.2.1 de [BM03].

Ici, nous procédons autrement : on se donne une méthode de quadrature de type (1). Plutôt que d'estimer l'erreur à partir de la formule (13) et du support $\{x_0, \dots, x_n\}$, on utilise la caractérisation de l'ordre de la méthode (3) et on en déduit (2). L'avantage de cette méthode est que la vérification de l'ordre m d'une méthode (1) se fait automatiquement et peut même être confiée à matlab en symbolique !

Remarque 4. Les formules d'intégrations élémentaire de quadrature de type (1) sont choisies pour être au moins d'ordre n . Dans ce cas, les poids W_i sont donnés par (29) (expression théorique). Dans le cas où l'on choisit

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad x_i = a + ih \text{ où } h = (b - a)/n, \quad (14)$$

les formules de quadrature (1) sont appelées formules de Newton-Cotes fermées. On pourra consulter [CM89] (chapitre 2).

On déjà vu les cas particuliers suivants des méthodes de Newton-Cotes fermées :

- $n = 0$ correspond à la la méthode du rectangle ;
- $n = 1$ correspond à la la méthode du trapèze ;
- $n = 2$ correspond à la la méthode de Simpson ;
- $n = 4$ correspond à la la méthode de Boole-Villarceau (voir (16)).

On peut retrouver les coefficients de ces formules de quadrature, comme indiqué dans la remarque 5 page suivante page 8.

On peut montrer (voir chapitre 2 de [CM89]) que toute méthode de Newton-Cotes fermée à $n + 1$ (avec n non nul) points de support est d'ordre n si n est impair et d'ordre $n + 1$ si n est pair. Cela généralise les propriétés vue en cours (voir remarque 3.20 de [BM03]) : la méthode du trapèze ($n = 1$) est d'ordre 1, celle de Simpson ($n = 2$) est d'ordre 3.

valeurs de n	nom de la méthode	valeurs des poids \widetilde{W}_i	ordre
0	rectangle	1	0
1	trapèze	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1
2	Simpson	$\frac{1}{6}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{1}{6}$	3
3		$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{8}$	3
4	Boole-Villarceau	$\frac{7}{90}$ $\frac{16}{45}$ $\frac{2}{15}$ $\frac{16}{45}$ $\frac{7}{90}$	5
6	Wedle (ou Hardy)	$\frac{41}{840}$ $\frac{9}{35}$ $\frac{9}{280}$ $\frac{34}{105}$ $\frac{9}{280}$ $\frac{9}{35}$ $\frac{41}{840}$	7

TAB. 1 – Quelques valeurs des poids \widetilde{W}_i et ordre des méthodes selon les valeurs de n .

On peut être plus précis que la majoration (2) : comme pour les méthode déjà vues en cours, on peut montrer qu'une méthode de Newton-Cotes d'ordre m vérifie :

Il existe $\alpha \geq 0$ tel que, pour toute fonction $f \in C^{m+1}[a, b]$,

$$E_n(a, b, f) = \alpha h^{m+2} f^{(m+1)}(\xi), \text{ où } \xi \in [a, b]. \quad (15)$$

Plus précisément, $m = n$ si n est impair et $m = n + 1$ si n est pair. On pourra consulter pour cela l'exercice 2.3 de [CM89].

3. On étudie maintenant la méthode :

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_4(a, b, f) = \frac{h}{90} \left(7f(a) + 32f\left(a + \frac{h}{4}\right) + 12f\left(a + \frac{h}{2}\right) + 32f\left(a + \frac{3h}{4}\right) + 7f(b) \right). \quad (16)$$

Remarque 5. Pour retrouver la formule (16), qui est une méthode de Newton Cotes (avec $n = 4$, voir remarque 4 page précédente), on peut utiliser la formule (38), ou mieux (39), qui est ramené à un intervalle fixe $[-1, 1]$. On testera la fonction matlab fournie `poids_quadrature_uniforme` qui calcule les poids \widetilde{W}_i (voir (39)).

Puisque cette fonction utilise l'inverse de la matrice de Vandermonde, il faut se méfier de cette fonction, à cause du grand conditionnement de la matrice de Vandermonde (cf. exercice 1.6 et TP 1.F de [BM03]). On utilisera donc la fonction matlab `poids_quadrature_uniforme` pour des petites valeurs de n ou alors en symbolique.

On pourra aussi retrouver les poids de la formule (16) grâce au script `autreetude`.

On a indiqué dans le tableau 1 quelques valeurs des coefficients \widetilde{W}_i : on retrouve les méthodes du rectangle, du trapèze et de Simpson vues en cours, ainsi que la méthode de Villarceau (16).

On pourra constater, grâce à la fonction `poids_quadrature_uniforme`, que pour $n \geq 8$, des poids négatifs apparaissent, ce qui provoque des erreurs d'arrondis. En pratique, on utilise donc ces formules pour $n \leq 7$. Pour plus de détails, voir [CM89].

Pour trouver l'ordre de ces méthode, on pourra consulter la fonction matlab `ordre_methode_elementaire`, grâce à laquelle on trouve les ordres indiqués dans la dernière colonne du tableau 1. On retrouve aussi le fait que la méthode (16) est d'ordre 5.

Dans ce tableau, on retrouve aussi de façon empirique le résultat annoncé en remarque 4 page 7 (voir (15)).

(a) La méthode (16) est bien une méthode du type (1) avec $n = 4$, $x_i = a + ih/4$ et

$$\boxed{W_0 = \frac{7}{90}h, \quad W_1 = \frac{16}{45}h, \quad W_2 = \frac{2}{15}h, \quad W_3 = \frac{16}{45}h, \quad W_4 = \frac{7}{90}h.} \quad (17)$$

(b) Soit p un polynôme de degré au plus 5. Par définition, l'erreur est égale à

$$E_4(-1, 1, p) = \int_{-1}^1 p(x)dx - I_4(-1, 1, p). \quad (18)$$

Puisque, $a = 1$ et $b = -1$, il vient

$$\begin{aligned} I_4(-1, 1, p) &= \frac{2}{90} \left(7p(-1) + 32p\left(-\frac{1}{2}\right) + 12p(0) + 32p\left(\frac{1}{2}\right) + 7p(1) \right) \\ &= \frac{2}{90} \left(12p(0) + 7(p(-1) + p(1)) + 32 \left(p\left(-\frac{1}{2}\right) + p\left(\frac{1}{2}\right) \right) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Dans l'expression (19), on remarque, par symétrie, que si p est impair, $I_4(-1, 1, p)$ est nulle. De même, si p est impair, $\int_{-1}^1 p(x)dx$ est nulle. Ainsi, par linéarité, dans (18), ne subsistent que les termes de degré pair (0, 2 et 4), pour lesquels on vérifie que l'erreur correspondante est nulle : par exemple, si $p(x) = 1$

$$E_4(-1, 1, p) = \int_{-1}^1 p(x)dx - I_4(-1, 1, p) = 2 - \frac{2}{90}(12 + 2 \times 7 + 2 \times 32) = 0.$$

On vérifie de même que

$$E_4(-1, 1, x \mapsto x^2) = 0,$$

et que

$$E_4(-1, 1, x \mapsto x^4) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{l'ordre de la méthode (16) est donc égal à 5.}} \quad (20)$$

(c) De l'équivalence entre (2) et (1) (avec $m = 5$), on déduit de (20), qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que, pour toute fonction $f \in C^6[a, b]$,

$$\boxed{|E_4(a, b, f)| \leq \alpha h^7 \sup_{x \in [a, b]} |f^{(6)}(x)|.} \quad (21)$$

Remarque 6. Conformément à la remarque 4 page 7, on admet que pour la méthode (16) (de Newton Cotes correspondant à $n = 4$), on a selon (15) : il existe $\alpha \geq 0$ tel que, pour toute fonction $f \in C^6[a, b]$,

$$E_4(a, b, f) = \alpha h^7 f^{(6)}(\xi), \quad \text{où } \xi \in [a, b]. \quad (22)$$

- (d) Comme dans le cours, on écrit que l'intégrale approchée correspondant à la méthode composée sur l'intervalle $[A, B]$ associée à la méthode élémentaire (16) est la somme des intégrales approchées élémentaires sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} \int_A^B f(x) dx &\approx \sum_{i=0}^{N-1} I_4(x_i, x_{i+1}, f) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{90} \left(7f(x_i) + 32f\left(x_i + \frac{h}{4}\right) + 12f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + 32f\left(x_i + \frac{3h}{4}\right) + 7f(x_{i+1}) \right). \end{aligned}$$

On regroupe

- le terme $f(A) = f(x_0)$ qui intervient une fois ;
- le terme $f(B) = f(x_N)$ qui intervient une fois ;
- les termes $f(x_i)$ qui intervient $2(N-1)$ fois ;
- chacun des termes $f(x_i + h/4)$, $f(x_i + h/2)$ et $f(x_i + 3h/4)$ qui interviennent N fois.

On a donc

$$\begin{aligned} \int_A^B f(x) dx &\approx \frac{h}{90} \left(7(f(A) + f(B)) + 14 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right. \\ &\quad \left. + 32 \sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{4}\right) + 32 \sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{3h}{4}\right) + 12 \sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \right). \quad (23) \end{aligned}$$

- (e) L'erreur totale est majorée par la somme des erreurs locales, soit selon (21) :

$$\begin{aligned} |E_N(A, B, f)| &\leq \sum_{i=0}^{N-1} |E_4(x_i, x_{i+1}, f)| \leq \alpha h^7 \sum_{i=0}^{N-1} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f^{(6)}(x)| \\ &\leq N \alpha h^7 \sup_{x \in [A, B]} |f^{(6)}(x)| = (B - A) \alpha h^6 \sup_{x \in [A, B]} |f^{(6)}(x)|. \end{aligned}$$

On a donc : il existe $\gamma \geq 0$ tel que, pour toute fonction $f \in C^6[a, b]$

$$\boxed{|E_N(A, B, f)| \leq \gamma h^6 (B - A) \sup_{x \in [A, B]} |f^{(6)}(x)|.} \quad (24)$$

Remarque 7. En utilisant le résultat (22), on peut démontrer comme dans le cours (en utilisant le lemme 3.25 de [BM03]), qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que, pour toute fonction $f \in C^6[a, b]$,

$$\boxed{E_N(A, B, f) = \alpha h^6 (B - A) f^{(6)}(\xi), \text{ où } \xi \in [A, B].} \quad (25)$$

Remarque 8. On pourra consulter la fonction matlab fournie `int_fcn_villarceau` pour calculer l'intégrale approchée définie par (23).

En utilisant le script matlab fourni `demo_compar_methode_simpson_vil`, on pourra retrouver de façon empirique les estimations d'erreur en $\mathcal{O}(h^4)$ et $\mathcal{O}(6^4)$ par mesure d'une pente pour les méthode de Simpson et de Villarceau. En procédant comme dans le TP 3.F de [BM03], on trouvera des graphes identiques à ceux des figures 3 page suivante et 4 page suivante : par mesure des pentes des nuages (4 et 6), on retrouve donc les estimations d'erreur en $\mathcal{O}(h^4)$ et $\mathcal{O}(6^4)$.

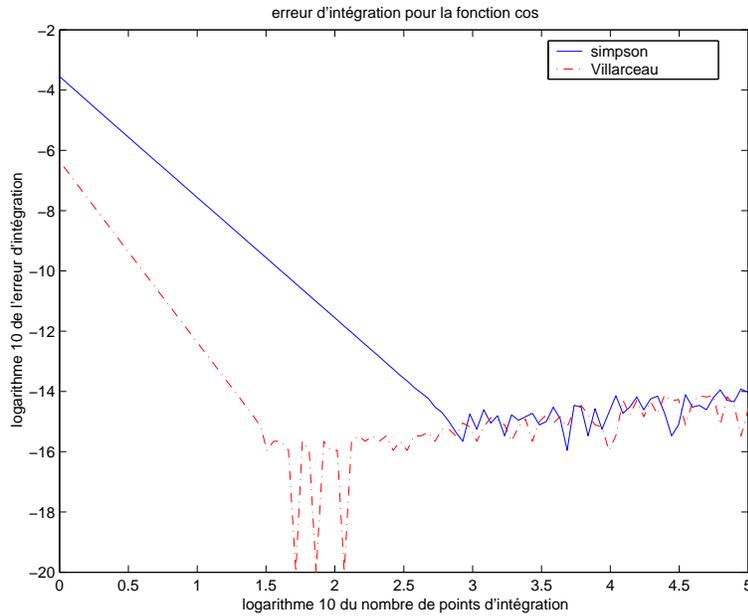


FIG. 3 – : mesure graphique d'ordre de méthode d'intégration.

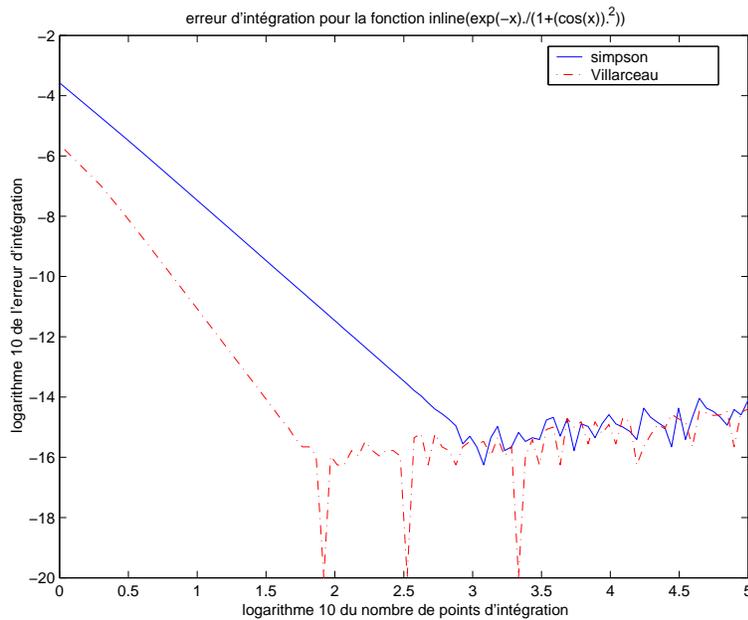


FIG. 4 – : mesure graphique d'ordre de méthode d'intégration.

4. On étudie la méthode de quadrature :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx I = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \dots \quad (26)$$

Comme pour la question 3b, il suffit de démontrer que l'erreur est nulle pour les polynômes $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$. Par parité, l'erreur est nulle pour les polynômes impair. Pour $p(x) = 1$, l'erreur vaut

$$E_1(-1, 1, p) = 2 - p\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - p\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0.$$

De même, pour $p(x) = x^2$, l'erreur vaut

$$E_1(-1, 1, p) = \frac{2}{3} - p\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - p\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{l'ordre de la méthode de Gauss-Legendre à deux points est donc égal à 3.}} \quad (27)$$

D'après l'équivalence entre (2) et (3) (pour $m = 3$), on a

Il existe $\alpha \geq 0$ tel que, pour toute fonction $f \in C^4[a, b]$,

$$|E_1(-1, 1, f)| \leq \alpha 2^5 \sup_{x \in [-1, 1]} |f^{(4)}(x)|. \quad (28)$$

Remarque 9. La majoration (28) est cohérente avec le cours qui prévoit une erreur du type (avec $n = 1$) :

$$E_1(-1, 1, f) = f^{(2n+2)}(\xi) \frac{2^{2n+3} ((n+1)!)^4}{(2n+3) ((2n+2)!)^3} = 2^5 f^{(4)}(\xi) \frac{1}{4320}, \text{ avec } \xi \in [-1, 1].$$

Annexe A. Démonstration de la propriété (8) sous l'hypothèse (9)

Montrons que (8) implique (9), en supposant de plus que la méthode (1) est au moins d'ordre n . Puisque la méthode (1) est au moins d'ordre n , on sait que la matrice de Vandermonde est inversible (si les x_i sont deux à deux distincts) et que les coefficients W_i sont donnés par

$$\begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_{n-1} \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \frac{b^3-a^3}{3} \\ \vdots \\ \frac{b^n-a^n}{n} \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

(voir exercice 3.4 de [BM03]).

Faisons un changement de variable pour se ramener à un intervalle de longueur fixe :

$$x \in [a, b] \iff y = 2\frac{x-a}{b-a} - 1 \in [-1, 1]. \quad (30)$$

Ce changement de variable s'inverse sous la forme

$$x = \frac{1}{2}(b-a)(y+1) + a. \quad (31)$$

Si f est une fonction définie sur $[a, b]$, on considère donc la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par

$$g(y) = f\left(\frac{1}{2}(b-a)(y+1) + a\right). \quad (32)$$

Ainsi, on a

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(y)dy. \quad (33)$$

On considère les réels $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[-1, 1]$ définis par

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad y_i = 2\frac{x_i - a}{b-a} - 1. \quad (34)$$

Puisque l'on fait l'hypothèse (8), on a donc

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad y_i = 2\tau_i - 1, \quad (35)$$

et ces réels ne dépendent pas de a , b et h . D'autre part, avec ces notations et (32), on a

$$\sum_{i=0}^n W_i f(x_i) = \sum_{i=0}^n W_i g(y_i). \quad (36)$$

Ainsi, selon (33) et (36), on constate que la formule (1) est exacte si et seulement si :

$$\int_a^b g(x)dx = \frac{2}{b-a} \sum_{i=0}^n W_i g(y_i). \quad (37)$$

La fonction f est polynômiale de degré k si et seulement si g l'est. Ainsi, (1) est exacte pour un polynôme de degré au plus m si et seulement si l'égalité (37) a lieu pour tous les polynômes de degré au plus m . Ainsi, en raisonnant comme dans l'exercice 3.4 de [BM03], on montre, à partir de (37), que la formule (1) est d'ordre m si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_{n-1} \\ W_n \end{pmatrix} = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & y_n \\ y_0^2 & y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_{n-1}^2 & y_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_0^{n-1} & y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \dots & y_{n-1}^{n-1} & y_n^{n-1} \\ y_0^n & y_1^n & y_2^n & \dots & y_{n-1}^n & y_n^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \vdots \\ \frac{1-(-1)^n}{n} \\ \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}, \quad (38)$$

où $h = b - a$. Si on considère les réels \widetilde{W}_i définis par

$$\begin{pmatrix} \widetilde{W}_0 \\ \widetilde{W}_1 \\ \widetilde{W}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{W}_{n-1} \\ \widetilde{W}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & y_n \\ y_0^2 & y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_{n-1}^2 & y_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_0^{n-1} & y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \dots & y_{n-1}^{n-1} & y_n^{n-1} \\ y_0^n & y_1^n & y_2^n & \dots & y_{n-1}^n & y_n^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \vdots \\ \frac{1-(-1)^n}{n} \\ \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

on constate qu'ils sont indépendants de a , b et h . On a donc bien la propriété (9).

Références

- [BM03] Jérôme Bastien et Jean-Noël Martin. *Introduction à l'analyse numérique ; applications sous matlab*. Dunod, Paris, 2003.
- [CM89] M. Crouzeix et A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, Paris, 1989.