

Corrigé de l'examen médian du 16 novembre 2005

Correction de l'exercice 1.

On considère la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $[1, 2]$; on la note F .

1. *Interpolation linéaire de F sur le support $\{1, 2\}$*

Remarque 1. Il convient de noter que la solution consiste à fournir une table des différences divisées, dont le créateur indique les conventions de précision, sachant que les calculs ne sont pas tronqués de façon sauvage ni recopiés, tronqués, de cases en cases, mais transmis par mémoire afin d'éviter toute erreur d'arrondi excessive. Proposer une méthode mettant en oeuvre les polynômes de Lagrange, après que le cours de MT40 a montré que l'algorithme de Newton était nettement supérieur, relève de la provocation intellectuelle. De façon plus précise, cela signifie que MT40 n'a pas interrogé vos pratiques, que vous seriez les mêmes étudiants après qu'avant !

- Calculer numériquement n'est pas honteux ! Vous pouvez mener les calculs de cette façon ; il suffit de les conduire avec toute la précision possible, en indiquant vos conventions d'affichage. Apprenez à utiliser les touches **Fix** de vos machines.
- Vu la simplicité du propos, vous pouvez aussi ici manipuler les valeurs exactes.

(a) On produit donc une table des valeurs approchées de la fonction F du type suivant :

| | | |
|-------|----------|----------------------|
| x_i | $F[x_i]$ | $F[\quad , \quad]$ |
| 1 | 0 | |
| | | $\ln(2)$ |
| 2 | $\ln(2)$ | |

Les calculs éventuels sont transférés par mémoire, sans troncature, et affichés dans la table avec quatre décimales par exemple.

Le polynôme d'interpolation sort de la table précédente sous écriture de Newton :

$$P_1(x) = 0 + \ln(2)(x - 1).$$

(b) Soit E la fonction définie par : $E(x) = F(x) - P_1(x)$.

L'expression de l'erreur est donnée par :

$$E(x) = \ln(x) - \ln(2)(x - 1).$$

On est prié de mener une étude de variations correcte, c'est-à-dire argumentée. En mathématiques scolaires, un résultat juste non prouvé, n'existe pas.

- E est définie, continue sur $[1, 2]$ car dérivable sur ce même intervalle en tant que somme de fonctions dérivables sur $[1, 2]$.
- *Variations* On calcule le nombre dérivé en x et on étudie son signe.

$$E'(x) = \frac{1}{x} - \ln(2).$$

On résout par exemple : $E'(x) \geq 0$.

$$\begin{aligned} (E'(x) \geq 0) &\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \ln(2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \ln(2) \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{\ln(2)} \quad \text{car } t \mapsto 1/t \text{ est décroissante sur } [1, 2]. \end{aligned}$$

Par suite on déduit le tableau des variations de E sur $[1, 2]$. :

| | | | |
|---------|---|---|--------------|
| x | 1 | $\frac{1}{\ln(2)}$ | 2 |
| $E'(x)$ | + | 0 | - |
| $E(x)$ | 0 | $\nearrow E\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)$ | $\searrow 0$ |

Une valeur approchée de $E\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)$ est donnée par : $E\left(\frac{1}{\ln(2)}\right) \simeq 0,0597$.

2. Interpolation linéaire sur $S = \{1, 2\}$ de $f = F'$

On considère la fonction, notée f , dérivée de F sur $[1, 2]$.

(a) On produit donc une table des valeurs approchées de la fonction f du type suivant :

| | | |
|-------|---------------|-------------------|
| x_i | $f[x_i]$ | $f[\quad, \quad]$ |
| 1 | 1 | |
| 2 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |

Les calculs éventuels sont transférés par mémoire, sans troncature, et affichés dans la table avec quatre décimales par exemple.

Le polynôme d'interpolation sort de la table précédente sous écriture de Newton :

$$p_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - 1) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

(b) L'expression de l'erreur est donnée par :

$$e(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

- e est définie, continue sur $[1, 2]$ car dérivable sur ce même intervalle en tant que somme de fonctions dérivables sur $[1, 2]$.
- *Variations* On calcule le nombre dérivé en x et on étudie son signe.

$$e'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif sur $[1, 2]$ donc $e'(x)$ a le signe de $x^2 - 2$, trinôme du second degré de zéros $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

D'où le tableau des variations de E sur $[1, 2]$. :

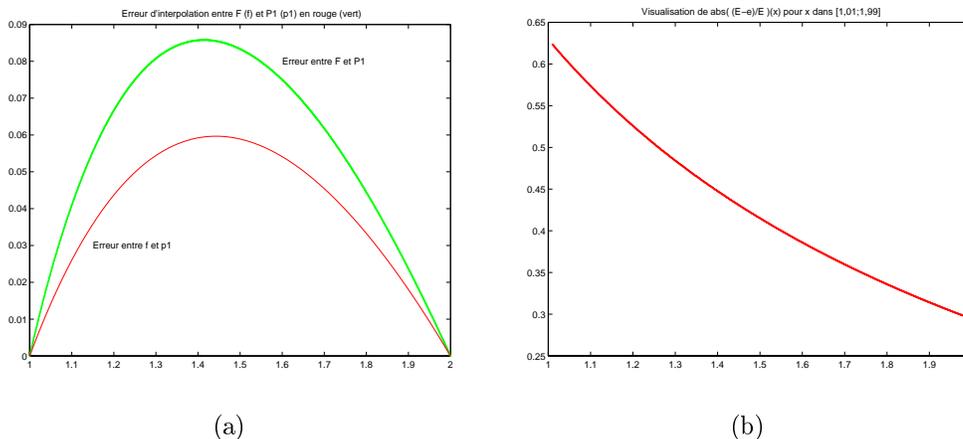


FIG. 1 – Les erreurs $|E|$ et $|e|$ (a) et $|E - e|/E$ (b).

| x | 1 | $\sqrt{2}$ | 2 |
|---------|---|---|--------------|
| $e'(x)$ | – | 0 | + |
| $e(x)$ | 0 | $\searrow e(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - \frac{3}{2}$ | $\nearrow 0$ |

Une valeur approchée de $e(\sqrt{2})$ est donnée par : $e(\sqrt{2}) \simeq -0,0858$.

3. Comparaison des erreurs $|E|$ et $|e|$ sur $[1, 2]$.

- e est négative sur $[1, 2]$ tandis que E y est positive ; ceci n'est pas étonnant vu la convexité et la concavité des courbes représentatives de F et f respectivement.
- En termes de sup d'erreur sur $[1, 2]$, celui de $|e|$ est nettement plus important que celui de $|E|$ puisque leur rapport est de l'ordre de $3/2$. Evidemment, vu le choix du support, l'erreur aux extrémités de l'intervalle est nulle dans les deux cas. Il fait bon le vérifier et ne pas contredire ce résultat.
- Le cours indiquait, qu'en général, on pouvait attendre une erreur d'interpolation de f «écrasée» par rapport à celle commise lors de l'interpolation de F . Le cours invitait à être vigilant... L'exemple étudié ci-dessus vous fait rencontrer une situation contraire. On se gardera de généraliser hâtivement.
- Pour procéder à une étude plus fine de la comparaison de ces valeurs absolues d'erreurs commises, on pourrait procéder sous le logiciel matlab aux visualisations suivantes :
 - Tracés des courbes représentatives de $|E|$ et $|e|$ sur $[1, 2]$. Voir le fichier joint : `demo1.m`, pour exécuter le calcul et l'affichage des deux erreurs considérées (voir figure 1(a)).
 - On pourrait aussi visualiser sur $[1, 2]$, en évitant les points extrêmes de l'intervalle (qui annulent les dénominateurs), l'erreur relative $|E - e|/E$. On pourra, pour ce faire, consulter le fichier `demo2.m` (voir figure 1(b)).

Correction de l'exercice 2.

On pourra consulter, pour plus de détail sur les formules de Newton-Cotes,

- les pages 171 à 182 de [Sch01] ;
- les pages 37 à 42 et la page 56 (exercice 2.3) de [CM89] ;

- les pages 51 à 53 (exercices 2.1-1, 2.1-2, 2.1-3, 2.2-1, 2.2-2) et les pages 65 à 68 (corrections des exercices cités) de [CM86];
- les pages 286 à 294 de [QSS00].

Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

1. (a) D'après l'exercice 3.4 de [BM03], traité en TD, la formule de quadrature

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n W_i f(x_i) \quad (1)$$

est exacte pour tous les polynômes de degré au plus n si et seulement si on a

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad \int_a^b x^j dx = \sum_{i=0}^n W_i x_i^j. \quad (2)$$

C'est encore équivalent à

$$D_n \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_{n-1} \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \frac{b^3-a^3}{3} \\ \vdots \\ \frac{b^n-a^n}{n} \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

où la D_n est la matrice de Vandermonde :

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Puisque les x_i sont deux à deux distincts, la matrice D_n est inversible (voir exercice 2.5 de [BM03], traité en TD), ce qui nous donne donc l'expression unique des W_i :

$$\boxed{\begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_{n-1} \\ W_n \end{pmatrix} = D_n^{-1} \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \frac{b^3-a^3}{3} \\ \vdots \\ \frac{b^n-a^n}{n} \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}}. \quad (5)$$

Par la suite, comme dans [BM03], nous appelons ordre d'une formule de quadrature, le degré du plus grand polynôme intégré exactement par cette formule (voir remarque 3.20 page 89).

- (b) Dans le cas où $a = -1$ et $b = 1$, la formule d'intégration numérique à $n + 1$ points de Gauss-Legendre est d'ordre $2n + 1$, et en particulier, elle est d'ordre n . Ainsi, les points x_i correspondent aux racines des polynômes orthogonaux et les coefficients W_i sont donnés

par (5). La formule d'intégration numérique à $n + 1$ points de Gauss-Legendre est donc une formule de quadrature du type (1).

Remarque 2. Par la suite, et comme pour les formules de Gauss, les coefficients x_i sont appelés les points de la formules de quadrature et les coefficients W_i sont appelés les poids de la formules de quadrature.

(c) On considère les polynômes de Lagrange $(l_i)_{0 \leq i \leq n}$:

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}. \quad (6)$$

(i) On peut condenser la rédaction des questions 1(c)i et 1(c)ii en raisonnant par équivalence : par linéarité, la formule quadrature du type (1) est exacte pour les polynômes de degré au plus n si et seulement si elle est exacte pour tous les polynômes l_i qui constituent une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur à n ; c'est-à-dire

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad \int_a^b l_i(x) dx = \sum_{j=0}^n W_j l_i(x_j). \quad (7)$$

Puisque $l_j(x_i) = \delta_{ij}$, c'est donc équivalent à

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad \int_a^b l_i(x) dx = \sum_{j=0}^n W_j \delta_{ij}, \quad (8)$$

soit encore

$$\boxed{\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad W_i = \int_a^b l_i(x) dx.} \quad (9)$$

(ii) Déjà fait ...

Remarque 3. De façon pratique, on utilisera la formule (9) et non la formule (5) pour le calcul des W_i en fonction des x_i ; en effet, la matrice de Vandermonde D_n est très mal conditionnée et le calcul de son inverse peut entraîner des instabilités numériques.

2. On suppose désormais que les points x_i sont définis par

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad x_i = a + \tau i, \quad \text{où } \tau = \frac{b - a}{n}. \quad (10)$$

Dans ce cas, la formule de quadrature (1) est appelée formule de Newton-Cotes (fermée).

Pour $n = 1$, on a $x_0 = a$ et $x_1 = b$. La formule (9) donne

$$W_0 = \int_a^b \frac{x - b}{a - b} dx,$$

ce qui donne en posant $u = (x - b)/(a - b)$

$$\begin{aligned} &= -(a - b) \int_0^1 u du, \\ &= \frac{b - a}{2}. \end{aligned}$$

De même, on a $W_1 = (b - a)/2$. La formule de quadrature (1) s'écrit donc pour $n = 1$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)),$$

ce qui est la formule du trapèze. Pour $n = 2$, on peut calculer de même les valeurs de W_0 , W_1 et W_2 . Il est plus rapide d'observer que la méthode de Simpson est d'ordre 3, en particulier d'ordre 2. Puisque $x_0 = a$, $x_1 = (a + b)/2$ et $x_2 = b$, d'après l'unicité des points W_i (question 1a), la méthode de Simpson est donc la formule de Newton-Cotes (fermée) à 3 points.

Remarque 4. On retrouve donc une généralisation des formules élémentaires vues en cours (trapèze et Simpson). La formule (1)-(10) est appelée fermée car le premier point est égal à a et le dernier point est égal à b . On peut aussi utiliser des formules de quadrature (1) où $n \geq 0$ et

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad x_i = a + \tau(i + 1), \quad \text{où } \tau = \frac{b-a}{n+2}. \quad (11)$$

On parle alors de formule de Newton-Cotes ouverte. Le cas $n = 0$ correspond à la formule du point milieu.

Remarque 5. On introduit les polynômes $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$:

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(t-j)}{(i-j)}. \quad (12)$$

Dans l'expression (9), on fait le changement de variable

$$x = x_0 + \tau t. \quad (13)$$

Pour $x = a$, on a $t = 0$ et pour $x = b$, $t = n$. On a donc

$$W_i = \tau \int_0^n l_i(x_0 + \tau t) dt.$$

On peut vérifier que

$$\frac{x_0 + \tau t - x_j}{x_i - x_j} = \frac{t-j}{i-j}.$$

On a donc

$$l_i(x_0 + \tau t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x_0 + \tau t - x_j)}{(x_i - x_j)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(t-j)}{(i-j)} = L_i(t).$$

On a donc

$$\int_a^b f(x)dx \approx \tau \sum_{i=0}^n w_i f(x_i), \quad (14)$$

où

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad w_i = \int_0^n L_i(t) dt. \quad (15)$$

L'avantage de la formule (15) par rapport à la formule (9) est le suivant : elle nous montre que les poids w_i ne dépendent que de i et de n et non de a , b et τ ; on peut donc les calculer

a priori pour chaque valeur de i et de n . Les polynômes L_i et L_{n-i} ont par symétrie la même intégrale, pour $i \in \{0, \dots, n\}$. les poids correspondant w_i et w_{n-i} sont donc égaux. Il suffit donc de ne calculer que la première moitié des coefficients w_i . Voir la fonction matlab `calcul_poids_newton_cotes_f` qui calcule les poids w_i grâce à la formule (15) (en numérique, ou mieux, en symbolique).

Remarque 6. On pourra aussi consulter [CM86], où est proposée une formule permettant de calculer les coefficients w_i par récurrence sur n .

| n | w_0 | w_1 | w_2 | w_3 | w_4 |
|-----|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | * | * | * | * |
| 2 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | * | * | * |
| 3 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{9}{8}$ | * | * | * |
| 4 | $\frac{14}{45}$ | $\frac{64}{45}$ | $\frac{24}{45}$ | * | * |
| 5 | $\frac{95}{288}$ | $\frac{375}{288}$ | $\frac{250}{288}$ | * | * |
| 6 | $\frac{41}{140}$ | $\frac{216}{140}$ | $\frac{27}{140}$ | $\frac{272}{140}$ | * |
| 7 | $\frac{5257}{17280}$ | $\frac{25039}{17280}$ | $\frac{9261}{17280}$ | $\frac{20923}{17280}$ | * |
| 8 | $\frac{3956}{14175}$ | $\frac{23552}{14175}$ | $-\frac{3712}{14175}$ | $\frac{41984}{14175}$ | $-\frac{18160}{14175}$ |
| 9 | $\frac{25713}{89600}$ | $\frac{141669}{89600}$ | $\frac{9720}{89600}$ | $\frac{17409}{89600}$ | $\frac{52002}{89600}$ |

TAB. 1 – Poids w_i des formules de Newton-Cotes pour $n \in \{1, \dots, 9\}$.

Dans le tableau 1, ont été données les valeurs des poids w_i (la première moitié uniquement).

Remarque 7. Dans ce tableau, on constate, qu'à partir de $n = 8$, des poids négatifs apparaissent, qui peuvent être source d'instabilités numériques. On évitera donc d'utiliser les formules de Newton-Cotes fermées pour $n \geq 8$.

3. Dans toute cette question, nous supposons f de classe C^{n+1} sur $[a, b]$.

(a) Si les x_i sont définis par (10) et les w_i sont définis par (9), alors, d'après la question 1a, la méthode est d'ordre n . On considère p_n le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. D'après la proposition 2.39 page 50 de [BM03], on a

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \left[\prod_{j=0}^n (x - x_j) \right].$$

Par intégration, on a donc

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_n(x) dx = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \left[\prod_{j=0}^n (x - x_j) \right] dx.$$

Puisque p_n est de degré au plus n , on a

$$\int_a^b p_n(x) dx = \sum_{i=0}^n W_i p_n(x_i) = \sum_{i=0}^n W_i f(x_i). \quad (16)$$

Bref, on a donc

$$E_n = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^n W_i f(x_i) = \int_a^b f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \psi_n(x) dx, \quad (17)$$

où

$$\psi_n(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j). \quad (18)$$

Remarque 8. Grâce à la formule (16), on fait le lien avec la présentation faite en cours ; la somme $\sum W_i f(x_i)$ de la formule de quadrature (1) n'est autre que l'intégrale approchée $\int_a^b p_n$ de f vue en cours !

- (b) On peut utiliser la formule (17), mais il est préférable d'utiliser le fait que, d'après la question 2, pour $n = 1$ et $n = 2$, il suffit d'utiliser les expressions des erreurs vue en cours pour les méthodes du trapèze et de Simpson. D'après les corollaires 3.16 page 86 et 3.18 page 87 de [BM03], on a donc si f est respectivement de classe C^2 ou C^4 :

$$E_1 = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta_1), \quad E_2 = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta_2), \quad (19)$$

où η_1 et η_2 appartiennent à $[a, b]$.

- (c) Puisque f est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$, d'après le théorème 2.50 page 60 de [BM03], pour tout x de $[a, b]$, il existe ξ_x tel que

$$f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}.$$

D'après (17), on a donc successivement

$$\begin{aligned} |E_n| &= \left| \int_a^b f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \psi_n(x) dx \right|, \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \right| |\psi_n(x)| dx, \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b \left| \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right| dx, \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b \left| \prod_{j=0}^n b - a \right| dx, \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b (b-a)^{n+1} dx, \end{aligned}$$

et donc

$$|E_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| (b-a)^{n+2}. \quad (20)$$

(d) D'après les résultats de la question 3b, on a, pour $n = 1$ et $n = 2$,

$$|E_1| \leq \frac{1}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| (b-a)^3, \quad (21)$$

$$|E_2| \leq \frac{1}{2880} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| (b-a)^5. \quad (22)$$

La majoration (21) est cohérente avec (20) pour $n = 1$; seul le facteur numérique a changé; en effet, dans (20), il provient d'une majoration assez élémentaire de $|\psi_n(x)|$, alors que dans (21), il a été calculé exactement. En revanche, la majoration (22) ne correspond pas à (20) pour $n = 2$; il faudrait y faire $n = 3$, comme si dans la méthode de Simpson, il y avait quatre points! Ce phénomène a été étudié en cours, c'est le doublement artificiel de l'un des points, qui «travaille donc comme deux».

Ce phénomène sera étudié plus précisément dans l'annexe A page 11.

4. Admettons que si n est pair et si f est de classe C^{n+2} sur $[a, b]$, alors on a

$$E_n = \frac{M_n}{(n+2)!n^{n+3}} (b-a)^{n+3} f^{(n+2)}(\xi), \text{ où } \xi \in [a, b], \quad (23a)$$

et où

$$M_n = \int_0^n t \phi_n(t) dt. \quad (23b)$$

On admettra de même, que si n est impair et si f est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$, alors on a

$$E_n = \frac{M_n}{(n+1)!n^{n+2}} (b-a)^{n+2} f^{(n+1)}(\xi), \text{ où } \xi \in [a, b], \quad (23c)$$

et où

$$M_n = \int_0^n \phi_n(t) dt. \quad (23d)$$

La rédaction de ce résultat est faite en annexe A page 11.

Pour la méthode composée, on procède comme dans le cours. Voir la section a) page 89 de [BM03]. Découpons $[A, B]$ en sous-intervalles à pas constant h ($h \in \mathbb{R}_+^*$), notés $[X_k, X_{k+1}]$. Ainsi, on pose, pour N un entier naturel non nul, $h = (B - A)/N$ et

$$\forall k \in \{0, \dots, N\}, \quad X_k = A + kh. \quad (24)$$

Chaque sous-intervalle $[X_k, X_{k+1}]$ (pour $0 \leq k \leq N - 1$) est découpé en sous-intervalle et on pose

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad x_{k,i} = X_k + i\tau, \quad (25)$$

où $\tau = (X_{k+1} - X_k)/n = h/n$. On approchera $\int_{X_k}^{X_{k+1}} f(x) dx$ par la formule de quadrature (1)

$$\int_{X_k}^{X_{k+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n W_i f(x_{k,i}). \quad (26)$$

Nous en déduisons

- (a) la valeur approchée $I_{n,N}$ de $\int_A^B f(x)dx$. Elle est la somme de N valeurs approchées élémentaires

$$I_{n,N} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^n W_i f(x_{k,i}), \quad (27)$$

soit encore en utilisant l'expression (15)

$$I_{n,N} = \tau \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^n w_i f(x_{k,i}). \quad (28)$$

- (b) De même, l'erreur d'intégration globale $E_{n,N}$ est la somme de N valeurs d'erreurs élémentaires $E_{k,n}$ commises sur chacun des intervalles $[X_k, X_{k+1}]$:

$$E_{n,N} = \sum_{k=0}^{N-1} E_{k,n}. \quad (29)$$

On a donc , selon (23a) (si n est pair)

$$E_{n,N} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{M_n}{(n+2)!n^{n+3}} h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi_k) = \frac{M_n}{(n+2)!n^{n+3}} h^{n+3} \sum_{k=0}^{N-1} f^{(n+2)}(\xi_k).$$

où $\xi_k \in [X_k, X_{k+1}]$ et où M_n est donné par (23b). En utilisant le lemme 3.25 page 92 de [BM03], on a donc

$$E_{n,N} = \frac{M_n}{(n+2)!n^{n+3}} h^{n+3} N f^{(n+2)}(\xi),$$

où $\xi \in [A, B]$, soit encore

$$E_{n,N} = \frac{M_n(B-A)}{(n+2)!n^{n+3}} h^{n+2} f^{(n+2)}(\xi). \quad (30)$$

De même, si n est impair, on montre que

$$E_{n,N} = \frac{M_n(B-A)}{(n+1)!n^{n+2}} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \quad (31)$$

où $\xi \in [A, B]$ et M_n est donné par (23d).

On pourra consulter les fonctions `int_fcn_newton_cotes_f` ou `int_fcn_newton_cotes_f_20` qui permettent des approximations d'intégrales pour différentes valeurs de n et de N .

La formule (28) est utilisée dans chacune des deux fonctions `int_fcn_newton_cotes_f` ou `int_fcn_newton_cotes_f_20`, mais a été programmée de façon vectorielle, afin d'éviter les boucles. Voir annexe B page 17.

On consultera aussi l'annexe C page 19 où on été faites quelques simulations numériques. On y montre aussi pourquoi il peut être dangereux de prendre de trop grandes valeurs de n .

Annexe A. Étude de l'erreur E_n

Démontrons maintenant les expressions (23) de l'erreur d'intégration E_n .

Cette preuve est largement inspirée

- de la preuve du théorème 8.2 p. 87 de [QSS00] ;
- de l'exercice 2.3 page 56 de [CM89] ;
- des exercices 2.2-1 pages 52, 53, 67 et 68 de [CM86].

On donne la preuve complète dans le cas où n est pair, de la forme $n = 2m$.

La preuve de (23) pour n impair est admise ! On pourra consulter [CM86].

On pose

$$\Psi_n(x) = \int_a^x \psi_n(t) dt. \quad (32)$$

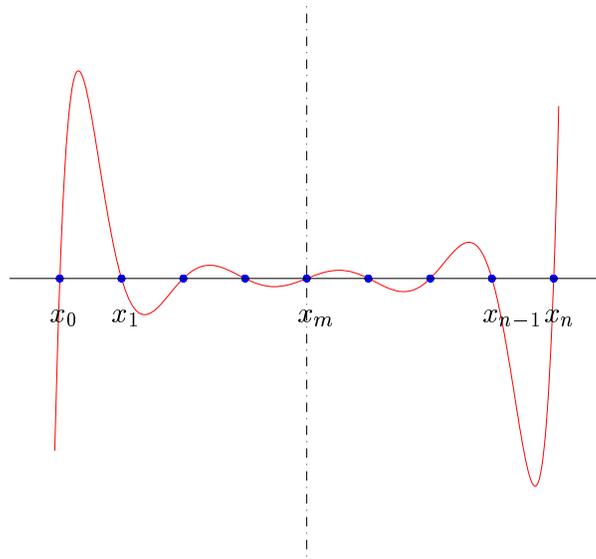


FIG. 2 – Le polynôme ψ_n pour $n = 2m$.

Dans le cas où n est pair, le polynôme ψ_n , défini par (18) a été représenté sur la figure 2 : le point de coordonnées $(0, x_m) = (0, (a + b)/2)$ constitue le centre de symétrie du graphe de ψ_n .

La preuve se fait en plusieurs étapes.

1. Démontrons tout d'abord que

$$\Psi_n(a) = \Psi_n(b) = 0. \quad (33)$$

D'après (32), $\Psi_n(a)$ est nul. De plus, d'après la propriété de symétrie évoquée précédemment, $\Psi_n(b)$ est donc aussi nul.

□

2. Démontrons maintenant que

$$E_n = - \int_a^b f[x_0, x_1, \dots, x_n, x, x] \Psi_n(x) dx. \quad (34)$$

On rappelle que, puisque f est de classe C^{n+2} sur $[a, b]$, selon la proposition 2.48 page 59 de [BM03], la fonction $x \mapsto f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$ est dérivable sur $[a, b]$ et que

$$\frac{d}{dx}(f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x, x], \quad (35)$$

Intégrons (17) par partie et utilisons (32) et (35); il vient :

$$E_n = \int_a^b f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \psi_n(x) dx = - \int_a^b f[x_0, x_1, \dots, x_n, x, x] \Psi_n(x) dx + \left[f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \Psi_n(x) \right]_{x=a}^{x=b}.$$

D'après (33), on a donc (34). □

Remarque 9. Dans le cours, nous avons systématiquement utilisé la formule (17) pour étudier l'erreur (pour les «méthodes classiques») notamment pour les corollaires 3.12, 3.13, 3.16 et 3.18, en utilisant les corollaires 3.4 et 3.6 et en utilisant le signe de ψ_n constant ou non pour $n \in \{0, 1, 2\}$. Cette technique a aussi été réutilisée pour les gaussiennes, en «doublant» chaque point x_i . Si n est supérieur à 3, cette technique ne fonctionne plus, car ψ_n ou ψ_{n+1} ne sont plus de signe constant. L'avantage de la formule (34) est de «rendre» Ψ_n de signe constant, dans le cas où les x_i sont répartis de façon linéaire dans $[a, b]$.

3. Démontrons maintenant que

$$E_n = -\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b \Psi_n(x) dx, \quad \text{où } \xi \in [a, b]. \quad (36)$$

Admettons provisoirement que Ψ_n est positive sur $[a, b]$. Elle est continue sur $[a, b]$. La fonction $x \mapsto f[x_0, x_1, \dots, x_n, x, x]$ est continue sur $[a, b]$, puisque f est de classe C^{n+2} . D'après le second théorème de la moyenne (voir par exemple théorème A.8 page 327 de [BM03]), l'égalité (34) implique qu'il existe η dans $[a, b]$ tel que

$$E_n = -f[x_0, x_1, \dots, x_n, \eta, \eta] \int_a^b \Psi_n(x) dx.$$

Enfin, puisque f est de classe C^{n+2} , d'après la proposition 2.50 page 60 de [BM03], il existe ξ dans $[a, b]$ tel que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, \eta, \eta] = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!},$$

et donc (36) en découle. □

Démontrons maintenant la positivité de Ψ_n sur $[a, b]$, ce qui n'est pas une mince affaire !

On rappelle que les points x_i sont définis par (11) et que les fonctions ψ_n et Ψ_n sont respectivement définies par (18) et (32).

Cette propriété dépend fortement de la répartition des x_i dans $[a, b]$ et n'est pas toujours vraie !

Cette preuve est directement inspirée (et adaptée aux notations de l'exercice) de l'exercice 2.3 page 56 de [CM89] et de [CM86].

Le polynôme ψ_n , représenté sur la figure 2 page 11 n'est pas de signe constant sur $[a, b]$, mais sa primitive sur $[a, x]$ l'est ! Cette propriété est due à la répartition des x_i (voir (11)) et l'aspect pair de n . Elle peut s'expliquer formellement de la façon suivante : le polynôme ψ_n change de signe à chaque valeur de x_i , mais chacune de ses «bosses» a une surface décroissante jusqu'au point du milieu x_m .

Formalisons cette démonstration : on introduit, pour $k \in \{0, \dots, m-1\}$, l'aire de la « $k+1$ -ème bosse» :

$$U_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi_n(t) dt. \quad (37)$$

La preuve se fait en plusieurs étapes.

- Observons tout d'abord que

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad U_k = (-1)^k |U_k|. \quad (38)$$

Cela provient du fait que ψ_n change de signe pour chaque x_i et est de signe constant sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$. Puisque n est pair, ψ_n est négatif sur $] -\infty, x_0[$; on en déduit aisément que

$$\text{pour tout } k \in \{0, \dots, n-1\}, \psi_n \text{ est du signe de } (-1)^k \text{ sur }]x_k, x_{k+1}[. \quad (39)$$

Par intégration, on en déduit donc (38).

- Démontrons maintenant que

$$\forall k \in \{0, \dots, m-2\}, \quad |U_{k+1}| \leq |U_k|. \quad (40)$$

Soit donc $k \in \{0, \dots, m-2\}$ fixé. Pour comparer $|U_{k+1}|$ et $|U_k|$, on les ramène tous les deux à une intégrale sur le même intervalle par changement de variable. Selon (39), on peut écrire

$$|U_{k+1}| = \int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} |\psi_n(t)| dt. \quad (41)$$

En faisant le changement de variable $u = t - \tau$, on écrit donc successivement

$$\begin{aligned} |U_{k+1}| &= \int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \prod_{j=0}^n |t - x_j| dt, \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \prod_{j=0}^n |u + \tau - (a + j\tau)| du, \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} |u + \tau - a| \prod_{j=1}^n |u - (a + (j-1)\tau)| du, \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} |u + \tau - a| \prod_{j=1}^n |u - x_{j-1}| du, \end{aligned}$$

où, dans le produit, on pose $j' = j - 1$

$$\begin{aligned} &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} |u + \tau - a| \prod_{j'=0}^{n-1} |u - x_{j'}| du, \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} |u + \tau - a| \prod_{j'=0}^{n-1} |u - x_{j'}| du. \end{aligned}$$

Bref, il nous faut comparer $|U_k|$ et $|U_{k+1}|$ respectivement définis par

$$|U_k| = \int_{x_k}^{x_{k+1}} |t - x_n| \prod_{j=0}^{n-1} |t - x_j| dt, \quad |U_{k+1}| = \int_{x_k}^{x_{k+1}} |t - (a - \tau)| \prod_{j=0}^{n-1} |t - x_j| dt.$$

Pour démontrer (40), il suffit donc de démontrer que

$$\forall t \in [x_k, x_{k+1}], \quad |t - (a - \tau)| \leq |t - x_n|,$$

ce qui est équivalent, puisque $x_k \geq a - \tau$ et $x_{k+1} \leq x_n$ à

$$\forall t \in [x_k, x_{k+1}], \quad t - (a - \tau) \leq -t + x_n,$$

soit encore

$$\forall t \in [x_k, x_{k+1}], \quad t \leq \frac{a + b - \tau}{2}.$$

dont on vérifie que c'est vrai car $k \leq m - 2$.

- Montrons maintenant que

$$\forall x \in [a, (a + b)/2[, \quad \Psi_n(x) \geq 0. \quad (42)$$

Fixons x dans $[a, (a + b)/2[$ et notons q le plus grand entier tel que $x_{2q} < x$. On a alors $2q \leq m - 2$. On écrit successivement (en considérant éventuellement nulle la première intégrale) :

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) &= \int_a^x \psi_n(t) dt, \\ &= \int_a^{x_{2q}} \psi_n(t) dt + \int_{x_{2q}}^x \psi_n(t) dt. \end{aligned}$$

La première intégrale est positive puisque

$$\begin{aligned} \int_a^{x_{2q}} \psi_n(t) dt &= \sum_{k=0}^{q-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} \psi_n(t) dt, \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} U_{2k} + U_{2k+1}, \end{aligned}$$

et grâce à (38)

$$= \sum_{k=0}^{q-1} |U_{2k}| - |U_{2k+1}|,$$

et grâce à (40) puisque $2k \leq m - 2$

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{k=0}^{q-1} 0, \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Enfin, l'intégrale $\int_{x_{2q}}^x \psi_n(t) dt$ est positive. En effet, on sait que x appartient à $[x_{2q}, x_{2q+2}]$. Si x appartient à $[x_{2q}, x_{2q+1}]$, on écrit, compte tenu de (39)

$$\int_{x_{2q}}^x \psi_n(t) dt \geq 0.$$

Au contraire, si x appartient à $]x_{2q+1}, x_{2q+2}]$, on écrit

$$\begin{aligned} \int_{x_{2q}}^x \psi_n(t) dt &= \int_{x_{2q}}^{x_{2q+1}} \psi_n(t) dt + \int_{x_{2q+1}}^x \psi_n(t) dt, \\ &\geq \int_{x_{2q}}^{x_{2q+1}} \psi_n(t) dt + \int_{x_{2q+1}}^{x_{2q+2}} \psi_n(t) dt, \end{aligned}$$

et grâce à (38)

$$= |U_{2q}| - |U_{2q+1}|,$$

et enfin, grâce à (40), et puisque $2q \leq m - 2$

$$\geq 0.$$

- De (42) et de la symétrie autour de $x_m = (a + b)/2$, on déduit

$$\forall x \in [(a + b)/2, b], \quad \Psi_n(x) \geq 0. \quad (43)$$

□

4. Démontrons finalement que (23) est vraie! Remarquons que, compte tenu de (32), l'intégrale de (36) est une intégrale double égale, d'après le théorème de Fubini, à

$$\int_a^b \Psi_n(x) dx = \int_a^b \left(\int_a^x \psi_n(t) dt \right) dx = \iint_{\mathcal{D}} \psi_n(t) dx dt,$$

où \mathcal{D} est la partie bornée de \mathbb{R}^2 définie par

$$\mathcal{D} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \quad t \in [a, x]\}.$$

Décrivons cette partie en tranche verticale :

$$\mathcal{D} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a, b], \quad x \in [t, b]\}.$$

Ainsi, en appliquant de nouveau le théorème de Fubini :

$$\iint_{\mathcal{D}} \psi_n(t) dx dt = \int_{t=a}^{t=b} \left(\int_{x=t}^{x=b} \psi_n(t) dx \right) dt = \int_a^b (b - t) \psi_n(t) dt.$$

On a donc

$$E_n = -\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \mathcal{I}_n \text{ où } \mathcal{I}_n = \int_a^b (b-t) \prod_{j=0}^n (t-x_j) dt. \quad (44)$$

et où $\xi \in [a, b]$. L'expression de \mathcal{I}_n dans l'erreur (44) possède l'inconvénient de dépendre des x_i et de a et de b . Proposons comme pour l'expression des poids w_i (15), une expression de \mathcal{I}_n indépendante des x_i et de a et de b . On fait donc un changement de variable identique à (13) :

$$t = x_0 + \tau u. \quad (45)$$

On pose

$$\phi_n(t) = \prod_{j=0}^n (t-j). \quad (46)$$

On obtient donc successivement

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n &= \int_0^n \tau^2 (u-n) \prod_{j=0}^n (\tau(u-j)) du, \\ &= \tau^{n+3} \int_0^n (u-n) \prod_{j=0}^n (u-j) du, \end{aligned}$$

on pose encore $v = n - u$

$$= \tau^{n+3} \int_0^n v \prod_{j=0}^n (n-j-v) dv,$$

dans le produit, on pose $j' = n - j$

$$\begin{aligned} &= \tau^{n+3} \int_0^n v \prod_{j'=0}^n (j' - v) dv, \\ &= (-1)^{n+1} \tau^{n+3} \int_0^n v \prod_{j=0}^n (v - j) dv, \\ &= -\tau^{n+3} \int_0^n t \phi_n(t) dt, \\ &= -\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+3} \int_0^n t \phi_n(t) dt, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure. □

On peut écrire les deux formules (23a) et (23c) sous la forme

$$E_n = \begin{cases} \mathcal{M}_n (b-a)^{n+3} f^{(n+2)}(\xi), & \text{si } n \text{ est pair et } f \text{ est } C^{n+2}, \\ \mathcal{M}_n (b-a)^{n+2} f^{(n+1)}(\xi), & \text{si } n \text{ est impair et } f \text{ est } C^{n+1}, \end{cases} \quad (47)$$

où \mathcal{M}_n est une constante numérique qui ne dépend que de n et ξ appartient à $[a, b]$.

On pourra aussi consulter la fonction matlab `calcul_poids_newton_cotes_f` qui fournit aussi les valeurs de \mathcal{M}_n .

On retrouve ainsi la formule (19).

| n | \mathcal{M}_n |
|-----|--------------------------------|
| 1 | $-\frac{1}{12}$ |
| 2 | $-\frac{1}{2880}$ |
| 3 | $-\frac{1}{6480}$ |
| 4 | $-\frac{1}{1935360}$ |
| 5 | $-\frac{1}{37800000}$ |
| 6 | $-\frac{1}{1567641600}$ |
| 7 | $-\frac{167}{426924691200}$ |
| 8 | $-\frac{37}{62783697715200}$ |
| 9 | $-\frac{173}{458209960750080}$ |

TAB. 2 – Valeurs des constantes \mathcal{M}_n de la formule (47) pour $n \in \{1, \dots, 9\}$.

Remarque 10. On constate grâce à la formule (47) qu'il est préférable de n'utiliser que des formules pour n pair : l'ordre est supérieur de un par rapport au cas où n est impair. Autrement dit, un des points «travaille comme deux». Compte tenu de la remarque 7, les formules de Newton-Cotes sont donc utilisées en pratique pour $n \in \{2, 4, 6\}$. Le plus fréquemment, c'est la formule de Simpson ($n = 2$) qui est utilisée.

Annexe B. Programmation vectorielle de la formule (28).

Réordonnons la formule (28) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} I_{n,N} &= \tau \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^n w_i f(x_{k,i}), \\ &= \tau \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_{k,i}) + w_n f(x_{k,n}) \right) \end{aligned}$$

et, puisque par symétrie, $w_n = w_0$

$$\begin{aligned} &= \tau \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_{k,i}) + w_0 f(x_{k,n}) \right), \\ &= \tau \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_{k,i}) + w_0 f(x_{k,n}) \right) + \tau \sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_{0,i}) + \tau w_0 f(x_{0,n}). \end{aligned}$$

On pose

$$s_1 = \tau \sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_{0,i}), \quad (48)$$

et on a donc

$$I_{n,N} = \tau \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_{k,i}) + w_0 f(x_{k,n}) \right) + \tau s_1 + \tau w_0 f(x_{0,n}). \quad (49)$$

On écrit ensuite successivement

$$\tau \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_{k,i}) + w_0 f(x_{k,n}) \right) + \tau w_0 f(x_{0,n}) = \tau \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_{k,i}) + \tau \sum_{k=0}^{N-1} w_0 f(x_{k+1,0}),$$

on intervertit les deux premières sommes et pose dans la seconde somme $k' = k + 1$:

$$\begin{aligned} &= \tau \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{N-1} w_i f(x_{k,i}) + \tau \sum_{k'=1}^N w_0 f(x_{k',0}), \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} w_i \sum_{k=1}^{N-1} f(x_{k,i}) + \tau \sum_{k=1}^N w_0 f(x_{k,0}), \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} w_i \sum_{k=1}^{N-1} f(x_{k,i}) + 2\tau w_0 \sum_{k=1}^N f(x_{k,0}) + \tau w_0 f(x_{N,0}), \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} w_i \sum_{k=1}^{N-1} f(x_{k,i}) + 2\tau w_0 \sum_{k=1}^N f(x_{k,0}) + \tau w_0 f(B). \end{aligned}$$

On pose

$$s_3 = w_0 f(B), \quad (50)$$

$$s_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{w}_i \sum_{k=1}^{N-1} f(x_{k,i}), \quad (51)$$

où

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad \tilde{w}_i = \begin{cases} 2w_0, & \text{si } i = 0, \\ w_i, & \text{si } i \geq 1. \end{cases} \quad (52)$$

On a donc

$$I_{n,N} = \tau(s_1 + s_2 + s_3), \quad (53)$$

où s_1 , s_2 et s_3 sont respectivement définis par (48), (51) et (50). Il n'y a pas de difficulté à calculer s_3 , ni s_1 de façon vectorielle. Pour le calcul de s_2 , on introduit la matrice M de $\mathcal{M}_{N-1,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall k \in \{1, \dots, N-1\}, \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad M_{k,i} = x_{k,i} = A + kh + i\tau. \quad (54)$$

On évaluera f pour chacun des éléments de la matrice M et on utilisera la somme en colonne grâce à la fonction `sum` de matlab. Il existe deux façon de calculer, de façon vectorielle la matrice M : voir la fonction `compar_deuxmeth`, dont on a extrait les lignes permettant le calcul de M :

```
extrvalx=linspace(A+h,B-tau,n*(N-1));
newextrvalx=(reshape(extrvalx,n,N-1))';
```

et

```
u=zeros(1,N-1);
u(:)=tau;
v=0:n-1;
Bb=u'*v;
v=zeros(1,n);
```

```

v(:)=h;
u=1:N-1;
Cc=u'*v;
newextrvalx2=A+(Bb+Cc);

```

La mesure temporelle des deux méthodes ne privilégie aucune d'entre elles!

On est alors en mesure de déterminer $I_{n,N}$ grâce à (53) et (48), (51) et (50). Voir les fonctions `int_fcn_newton_cotes_f` ou `int_fcn_newton_cotes_f_20`, dont on a extrait les lignes suivantes :

```

% corps de la fonction
if n==2*m
    poidstot=[poids , fliplr ( poids (1:end-1))];
else
    poidstot=[poids , fliplr ( poids )];
end
poidstotbis=poidstot ;
poidstotbis(1)=2*poidstotbis(1);
h=(B-A)/N;
tau=h/n;
if (N>=2)
    extrvalx=linspace(A+h,B-tau,n*(N-1));
    newextrvalx=(reshape(extrvalx,n,N-1))';
    fAv=feval(fcn,newextrvalx,varargin{:});
    valint1=tau*sum(poidstotbis(1:end-1).*sum(fAv,1));
else
    valint1=0;
end
fAv2=feval(fcn,linspace(A,A+h-tau,n),varargin{:});
valint2=tau*sum(poidstot(1:end-1).*fAv2);
valint3=tau*feval(fcn,B,varargin{:})*poidstot(end);
res=valint1+valint2+valint3 ;

```

Annexe C. Quelques simulations numérique, tracé de l'erreur et mise en évidence graphique de l'ordre des méthodes de Newton-Cotes.

De façon analogue au TP 3.F pages 135 et 136 de [BM03], on peut déterminer graphiquement l'ordre de la méthode de Newton-Cotes comme étant l'exposant p_n intervenant dans les formules (30) et (31) écrites sous la forme

$$E_{n,N} = \mathcal{J}_n h^{p_n} f^{q_n}(\xi),$$

où \mathcal{J}_n est une constante numérique ne dépendant pas de f et q_n est un entier ne dépendant pas de f . On pourra consulter et utiliser la fonction `ordre_int_cotes`.

Concluons par quelques simulations appliquées à la fonction $x \mapsto \sin(x)$ sur $[0, 1]$, en utilisant `ordre_int_cotes` avec les paramètres suivants :

```

A=0;
B=1;

```

```

nmin=0;
nmax=4;
p=300;
fcn='sin';

```

| n | ordre théorique | ordre mesuré | corrélation |
|-----|-----------------|--------------|-------------|
| 1 | 2 | 2.0002 | -0.9999 |
| 2 | 4 | 4.0005 | -0.9999 |
| 3 | 4 | 3.9995 | -0.9999 |
| 4 | 6 | 6.0089 | -0.9999 |
| 5 | 6 | 6.0000 | -0.9999 |
| 6 | 8 | 8.1020 | -0.9999 |
| 7 | 8 | 8.0301 | -0.9999 |
| 8 | 10 | 10.719 | -0.9999 |
| 9 | 10 | 9.6608 | -0.9999 |

TAB. 3 – Ordres théorique et mesuré de la méthode de Newton-cotes en prenant un polynôme de degré n pour $n \in \{1, \dots, 9\}$.

L'entier n a été choisi dans $\{1, \dots, 9\}$. On a présenté dans le tableau 3 l'ordre théorique des méthodes de Newton-Cotes et l'ordre mesuré par régression linéaire, ainsi que la corrélation obtenue (voir TP 3.F pages 135 et 136 de [BM03]). On constate la bonne adéquation entre les ordres théoriques et mesurés.

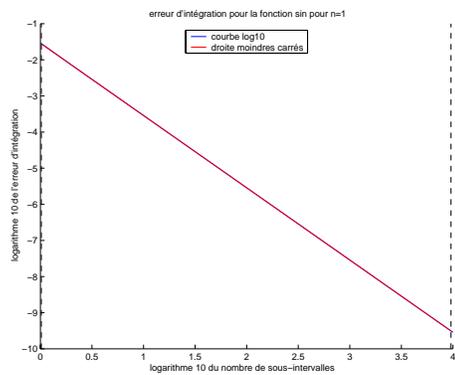
Pour n supérieur à 10, cette mesure d'ordre n'est plus possible.

Enfin, en figure 3 page suivante, on a représenté les graphiques obtenus grâce à la fonction `ordre_int_cotes` pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$. Sur chacune des figures 3(a) à 3(f), on constate que la partie de la courbe correspondant à des valeurs d'erreur supérieures à 10^{-16} (représentée en rouge) est affine et que sa pente correspond à l'opposé de l'ordre prévu. En revanche, pour des valeurs plus grande du nombre de sous-intervalle, l'erreur stagne autour de 10^{-16} , correspondant à la valeur du zéro machine sous machine : il ne sert à rien de prendre trop de sous-intervalles ! Ce phénomène est d'autant plus sensible que n est grand.

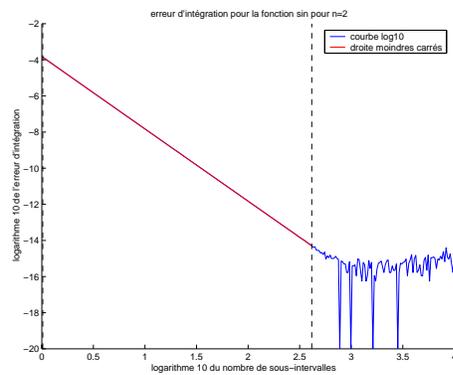
Enfin, en figure 4 page 22, on a représenté les graphiques obtenus grâce à la fonction `ordre_int_cotes` pour $n \in \{10, 15, 16, 19, 20\}$. Sur chacune des figures 4(a) à 4(e), on constate que le zéro machine est très vite atteint : il est donc inutile de prendre une valeur de n trop grande. De plus, on constate sur les figures 4(b) à 4(e), une dégradation : au lieu de se stabiliser autour de 10^{-16} , l'erreur est plus grande ; de plus, quand N augmente, l'erreur diminue ! Cela est d'autant plus sensible que n est grand. Cela corrobore ce qui a été annoncé en remarque 7 page 7 : des valeurs de n supérieures à 8 provoquent des instabilités numériques. La remarque 10 page 17 est donc totalement justifiée.

Références

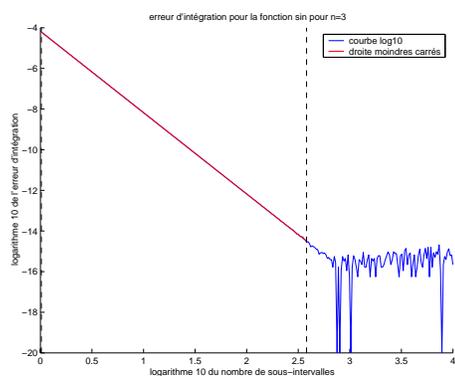
- [BM03] Jérôme Bastien et Jean-Noël Martin. *Introduction à l'analyse numérique ; applications sous matlab*. Dunod, Paris, 2003.
- [CM86] M. Crouzeix et A. L. Mignot. *Exercices d'analyse numérique des équations différentielles*. Masson, Paris, 1986.



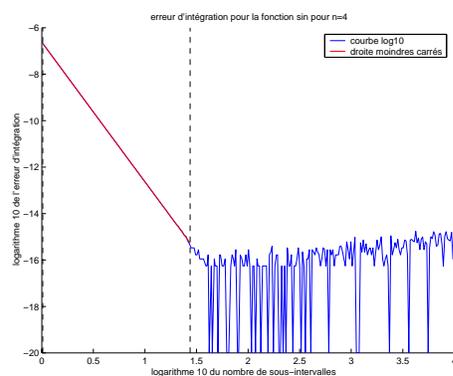
(a)



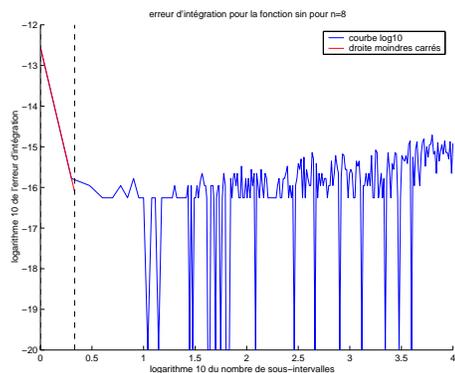
(b)



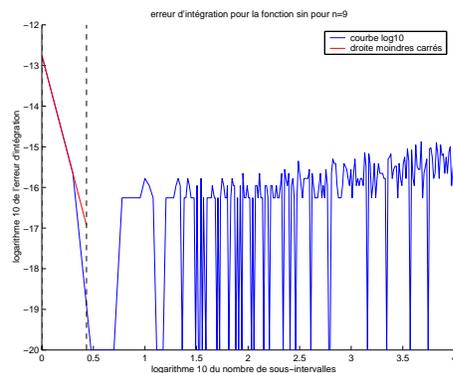
(c)



(d)

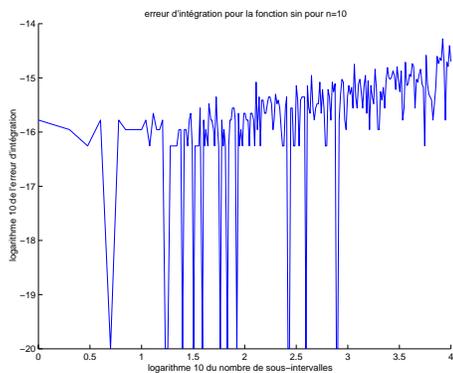


(e)

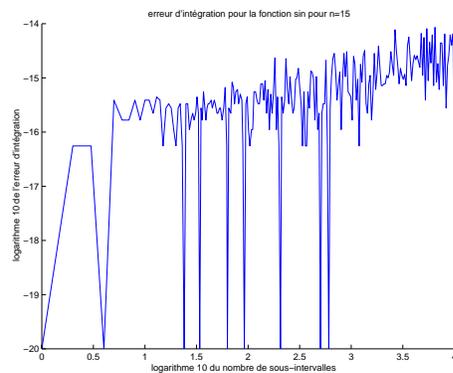


(f)

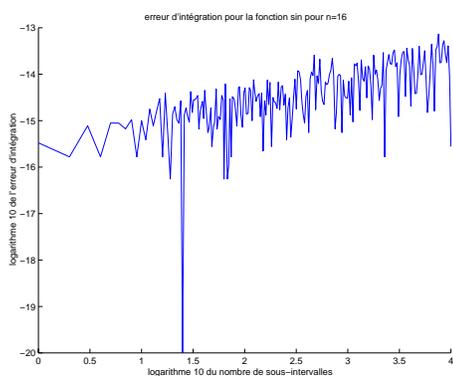
FIG. 3 – Les mesures d'ordres obtenues pour $n = 1$ (a), $n = 2$ (b), $n = 3$ (c), $n = 4$ (d), $n = 8$ (e) et $n = 9$ (f).



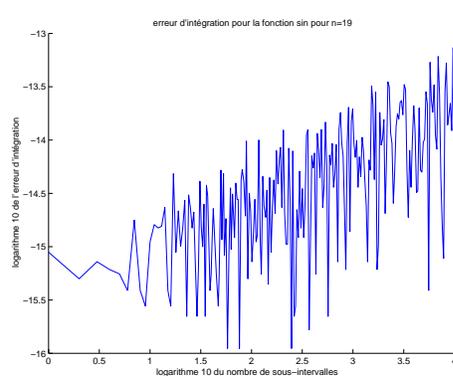
(a)



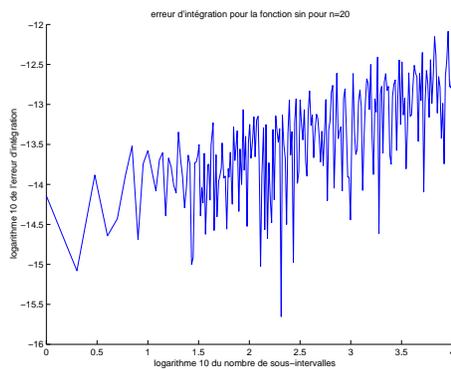
(b)



(c)



(d)



(e)

FIG. 4 – Les mesures d'ordres obtenues pour $n = 10$ (a), $n = 15$ (b), $n = 16$ (c), $n = 19$ (d) et $n = 20$ (e).

- [CM89] M. Crouzeix et A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, Paris, 1989. Disponible à la bibliothèque de l'UTBM à la cote QA371 CRO.
- [QSS00] A. Quarteroni, R. Sacco et F. Saleri. *Méthodes numériques pour le calcul scientifique, Programmes en matlab*. Springer, 2000. Disponible à la bibliothèque de l'UTBM à la cote QA297 QUA.
- [Sch01] Michelle Schatzmann. *Analyse numérique, une approche mathématique, Cours et exercices*. Dunod, 2001. Disponible à la bibliothèque de l'UTBM à la cote QA297 SCH.