

Examen final du 29 juin 2007

Durée : deux heure(s)

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

On pourra admettre tout résultat intermédiaire afin de poursuivre la résolution d'un exercice.

Exercice 1 (Intégration de Gauss).

La méthode proposée dans cet exercice a été implémentée avec succès en milieu industriel (Peugeot) pour évaluer la période d'un signal périodique, dont on ne connaissait qu'un échantillonnage.

On considère a un réel quelconque et une fonction f , C^∞ sur \mathbb{R} et vérifiant la condition suivante : il existe une constante M telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left| f^{(n)}(t) \right| \leq M. \quad (1)$$

(1) Dans cette question, on cherche à évaluer numériquement

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{où } x \in]a, a + 2[. \quad (2)$$

- (a) (i) Montrer que l'on peut fournir une valeur approchée de $A(x)$ par méthode de Gauss-Legendre.
- (ii) Grâce à un changement de variable, fournir l'évaluation conventionnelle de $A(x)$ qui sera effectivement évaluée par méthode Gaussienne.
- (b) On se propose de calculer $A(x)$ à ε près ($\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$) et on souhaite déterminer le nombre de points de support nécessaires. On note E_{n+1} l'erreur théorique commise.

(i) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |E_{n+1}| \leq MK^{2n+3} \frac{2^{2n+3} [(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3}, \quad (3)$$

où K est une constante appartenant à $[0, 1[$.

(ii) On pose

$$u_n = \frac{2^{2n+3} [(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3}. \quad (4)$$

- (A) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 (B) Montrer que cette suite tend vers zéro. Pour cette question, on pourra utiliser la formule de Stirling : quand n tend vers l'infini,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (5)$$

- (iii) En déduire un algorithme `recherche_nbpoints` ($\varepsilon \rightarrow n_0$), qui à partir de ε de \mathbb{R}_+^* , fournit le plus petit entier n_0 tel que

$$|u_{n_0}| \leq \varepsilon. \quad (6)$$

On montrera que cet algorithme fournit toujours une solution.

- (2) On considère désormais f définie par

$$f(t) = \alpha \sin(\omega t + \phi),$$

où les réels α , ω et ϕ existent mais ne sont pas nécessairement connus explicitement car on travaille en général sur des données discrètes dans les applications ; f peut représenter, par exemple, un signal (connu sur $]a, a + 2[$).

On note T la période de f . On suppose de plus que

$$\omega < 1.$$

- (a) Montrer que f vérifie la condition (1).
 (b) Montrer que T est le plus petit réel de $]a, a + 2[$ tel que $A(x) = 0$ (A définie par (2)) et vérifiant une hypothèse supplémentaire à préciser.
 (c) En déduire le plan d'une méthode, utilisant les acquis de MT44 nettement cités, fournissant la valeur de T de façon approchée.

Exercice 2 (Courbes de Bézier : applications pour l'ingénieur).

Nb : Nous rappelons cette évidence qu'en mathématiques, toute affirmation doit être argumentée...

On rapporte le plan affine \mathcal{P} au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) orthonormé direct et on donne les points $(P_i)_{0 \leq i \leq 3}$ par leurs coordonnées, comme suit :

$$P_0(0, 0); \quad P_1(1, 3); \quad P_2(10, 6); \quad P_3(10, 0).$$

(1) *Détermination de la courbe de Bézier (γ) de points de contrôle $(P_i)_{0 \leq i \leq 3}$.*

- (a) Quel est le degré de la courbe de Bézier (γ) ?
- (b) Quels sont les directions des tangentes à (γ) en les points P_0 et P_3 ?
- (c) Déterminer par leurs coordonnées $(x(u), y(u))$, avec u élément de $[0, 1]$, l'ensemble des points $B(u)$ de la courbe de Bézier (γ) .

(2) Faire une étude complète de la fonction vectorielle F définie par :

$$u \in [0, 1] \mapsto (x(u), y(u)) \in \mathbb{R}^2$$

Nb : On étudiera les domaines de définition continuité, dérivabilité de la fonction F ; puis on mènera l'étude des variations avant de fournir une allure de la courbe représentative.

(3) *Utilisation de la courbe (γ) pour l'ingénieur*

- (a) Lors d'une application industrielle, la courbe (γ) représente la section d'une came utilisée par une machine outil. Cette came est soumise à l'usure en cours d'utilisation ; l'ingénieur responsable doit prévoir le suivi de celle-ci afin de procéder en temps utile à son échange. On suppose qu'il dispose d'un outil logiciel capable d'acquérir la courbe (Γ) , déformée de (γ) par usure. Ainsi à tout instant t , on suppose connaître l'ensemble des points de (Γ) , notés $M(X(u), Y(u))$, avec u élément de $[0, 1]$.
- (b) En utilisant les outils présentés dans le cadre de MT44 proposer une méthode permettant d'assurer le suivi de l'outil évoqué ci-dessus. On décrira en particulier, en argumentant chacun des choix effectués :
 - (i) la méthode retenue pour mesurer l'usure de la came ;
 - (ii) les modalités de mise en oeuvre, le choix des méthodes mathématiques retenues ou pouvant l'être ;
 - (iii) les paramètres reconnus comme pertinents par l'ingénieur responsable, pour mener à bien cette tâche.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/>