

Corrigé de l'examen final du 28 juin 2006

Correction de l'exercice 1. Dans cet exercice, on étudie la formule de quadrature

$$\int_a^b r(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^n W_i r(x_i). \quad (1)$$

- (1) Voir exercice 3.4 p. 121 de [BM03], dont la question 1 montre que la formule de quadrature (1) est d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire exacte pour tous les polynômes de degrés inférieur ou égal à p) si et seulement si :

$$\forall j \in \{0, \dots, p\}, \quad \int_a^b x^j w(x)dx = \sum_{i=0}^n W_i x_i^j. \quad (2)$$

- (2) Voir exercice 3.4 p. 121 de [BM03], dont la question 2 montre que (2) est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^p & x_1^p & \dots & x_n^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_p \end{pmatrix}, \quad (3)$$

où

$$\forall j \in \{0, \dots, p\}, \quad I_j = \int_a^b x^j w(x)dx. \quad (4)$$

- (3) Pour toute la suite, on fera l'hypothèse que

$$p = 2n + 1. \quad (5)$$

Le système (3) est équivalent à $p = 2n + 1$ équations, c'est-à-dire le nombre d'«inconnues» x_i et W_i .

- (4) Pour toute la suite, on fera l'hypothèse que

$$a = 0, \quad b = +\infty, \quad w(x) = e^{-x}. \quad (6)$$

- (a) Un calcul simple et une intégration par partie montrent que

$$I_0 = I_1 = 1. \quad (7)$$

(b) Pour $n = 0$ et $p = 1$, (3) devient

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_0 \end{pmatrix} (W_0) = \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

(c) De (8), on déduit que $W_0 = x_O W_0 = 1$ et donc que

$$W_0 = x_0 = 1. \quad (9)$$

(5) (a) Un calcul d'intégration par partie fournit

$$\forall p \geq 1, \quad I_p = pI_{p-1}, \quad (10a)$$

$$I_0 = 1. \quad (10b)$$

(b) On en déduit par récurrence sur p que

$$\forall p \geq 0, \quad I_p = p!. \quad (11)$$

(6) Dans toute cette question, on supposera que

$$n = 1, \quad p = 3. \quad (12)$$

(a) En séparant les deux premières lignes et les deux dernières lignes de (3), on constate qu'elle est équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (13a)$$

$$\begin{pmatrix} x_0^2 & x_1^2 \\ x_0^3 & x_1^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}. \quad (13b)$$

(b) On vérifie que, si x_0 et x_1 sont distincts, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{pmatrix} x_1 & -1 \\ -x_0 & 1 \end{pmatrix}$$

De (13a), on déduit donc que

$$\begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

En réinjectant dans (13b), on a donc,

$$\frac{1}{x_1 - x_0} \begin{pmatrix} x_0^2 & x_1^2 \\ x_0^3 & x_1^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & -1 \\ -x_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

ce qui est équivalent, après factorisation par $x_1 - x_0$ et simplification

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_0x_1 + x_0 + x_1 = 2, \\ -x_0x_1(x_0 + x_1) + x_0^2 + x_1^2 + x_0x_1 = 6. \end{array} \right. \quad (15)$$

(c) Si on pose $s = x_0 + x_1$ et $p = x_0x_1$, on a $-x_0x_1 + x_0 + x_1 = -p + s = 2$ et
 $-x_0x_1(x_0 + x_1) + x_0^2 + x_1^2 + x_0x_1 = -x_0x_1(x_0 + x_1) + x_0^2 + (x_0 + x_1)^2 - x_0x_1 = -ps + s^2 - s = 6$

On remplace ensuite dans cette dernière équation p par $s - 2$, ce qui donne $s = 4$ et $p = 2$.
 On sait alors que x_0 et x_1 sont solution de $x^2 - sx + p = 0$, soit x_0 et x_1 sont solutions de

$$\boxed{x^2 - 4x + 2 = 0.} \quad (16)$$

(d) Après résolution, on a (à une permutation près) :

$$\boxed{x_0 = 2 - \sqrt{2}, \quad x_1 = 2 + \sqrt{2}.} \quad (17)$$

De (14), on déduit donc

$$\boxed{W_0 = \frac{1}{4} (2 + \sqrt{2}), \quad W_1 = \frac{1}{4} (2 - \sqrt{2})}. \quad (18)$$

(7) On pourrait formellement généraliser les calculs des questions 4c et 6 pour n quelconque : On considère la matrice de Vandermonde définie par

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \quad (19)$$

L'exercice 2.5 page 55 de [BM03] nous montre que D_n est inversible et nous fournit un mode de calcul en fonction des x_i .

On introduirait ensuite la matrice E_n définie par

$$E_n = \begin{pmatrix} x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \\ x_0^{n+1} & x_1^{n+1} & \dots & x_n^{n+1} \\ x_0^{n+2} & x_1^{n+2} & \dots & x_n^{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^{2n+1} & x_1^{2n+1} & \dots & x_n^{2n+1} \end{pmatrix} \quad (20)$$

et les vecteurs colonnes \mathcal{W}_n , A_n et B_n définis par

$$\mathcal{W}_n = \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} I_n \\ I_{n+1} \\ \vdots \\ I_{2n+1} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Comme dans les questions 4c et 6, on montre que les $n + 1$ premières lignes de (3) sont équivalentes à $D_n \mathcal{W}_n = A_n$ et $E_n \mathcal{W}_n = B_n$, soit encore

$$\boxed{\begin{cases} \mathcal{W}_n = D_n^{-1} A_n, \\ (E_n D_n^{-1}) A_n = B_n. \end{cases}} \quad (22)$$

La matrice $(E_n D_n^{-1})$ ne dépend que des x_i et les A_n et B_n sont connus. Ainsi, la seconde équation de (22) fournit, *a priori* $n + 1$ équations en les inconnues x_i . Une fois celle-ci calculées, on

peut alors déterminer les W_i grâce à la première équation de (22). Ces calculs sont cependant difficiles à faire.

- (8) (a) Les premiers polynômes de Laguerre \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 sont calculés et donnés dans l'annexe C.4 p. 356 de [BM03]. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(x) &= 1, \\ \mathcal{L}_1(x) &= -x + 1, \\ \mathcal{L}_2(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2),\end{aligned}$$

- (b) Pour les formules de Gauss Laguerre, d'après le cours, les x_i sont, d'après le cours, les racines de \mathcal{L}_n . En comparant les résultats des questions 4c et 6, on constate que les points recherchés sont exactement les points des formules de Gauss-Laguerre pour $n = 0$ et $n = 1$! C'est naturel : nous avons refait «à la main» les calculs du cours et déterminés les poids et les points de formules de quadrature à $n + 1$ d'ordre $2n + 1$. Cependant, il est bien plus aisé et automatisable de calculer les polynômes de Laguerre et d'en déduire les x_i comme leurs racines.

On pourra aussi consulter les points et les poids de Gauss Laguerre donner dans les tableau C.1 et C.2 pages 359 et 360 de [BM03], pour retrouver les résultats des questions 4c et 6.

Correction de l'exercice 2. Non rédigée actuellement.

Références

- [BM03] Jérôme Bastien et Jean-Noël Martin. *Introduction à l'analyse numérique ; applications sous matlab*. Dunod, Paris, 2003.