

## MÉTHODES CLASSIQUES D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

### 1. Objectifs

Dans ce TP, on programmera, dans un premier temps, quelques méthodes d'intégration classiques (méthodes des rectangles, des milieux, des trapèzes et de Simpson) qui seront testées sur des fonctions simples.

Dans un second temps, on comparera ces différentes méthodes en termes de temps de calcul, de nombres d'opérations et de précision de calcul.

### 2. Mise en forme de méthodes d'intégration

Soient  $a, b$  deux réels tels que  $a < b$ ,  $f$  une fonction de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On désire obtenir une approximation de l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  par les méthodes classiques d'intégration (méthodes des rectangles, des milieux, des trapèzes et de Simpson) en prenant  $n$  points d'intégration. On considère le pas de discrétisation défini par  $h = (b - a)/n$ .

On rappelle l'usage de la fonction *feval* de matlab : Si *fcn* est une chaîne représentant une fonction (built-in, déclarée dans un fichier .m, ou déclarée en *inline*) et si  $X$  est une matrice  $feval(fcn, X)$  renvoie une matrice  $Y$  de même taille, dont chacune des composantes est égale à l'évaluation de la fonction *fcn* sur chacune des composantes de  $X$ . Ainsi, grâce à cette fonction, il est possible de passer le nom de la fonction comme paramètre de la fonction qui calcule une valeur approchée de l'intégrale.

#### Question 1

*Écrire une fonction matlab (commentée, bien sûr) *intfcn*(c, n, a, b, fcn) qui calcule l'une des quatre valeurs approchées de l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$ , correspondant aux quatre méthodes ;  $a$  et  $b$  sont les bornes de l'intervalle d'intégration,  $n \in \mathbb{N}^*$  est le nombre de sous-intervalles,  $c$  est un entier appartenant à  $\{1, 2, 3, 4\}$  (suivant les quatre méthodes d'intégration) et *fcn* est une chaîne de caractère représentant le nom de la fonction  $f$  (built-in, déclarée dans un fichier .m, ou déclarée en *inline*).*

On s'interdira, dans les formules sommatoires, l'usage des boucles, remplacées avantageusement par des calculs vectoriels.

**Attention :** si on veut intégrer numériquement une fonction  $f$ , il faut prendre soin de l'écrire en matlab (en fichier \*.m ou en ligne) de façon vectorielle (c'est-à-dire, elle admet un argument de type

tableau). Cette condition est imposée par l'usage de la fonction *feval*. Par ailleurs, la fonction *trapz* de matlab existe déjà et pourrait être utilisée pour la formule des trapèzes, mais on utilisera plutôt la fonction *sum*, plus rapide d'emploi.

### Question 2

*Avec la fonction *intfcn*, calculer les différentes valeurs approchées des intégrales*

$$J_1 = \int_0^1 \cos(x) dx, \quad J_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx, \quad J_3 = \int_0^1 x^3 + x dx \quad (1)$$

*et comparez les à leur valeur exacte (on pourra choisir  $n \in \{10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5\}$ ). Quelle méthode vous paraît être la plus performante ? Quel critère objectif vous permet-il de justifier cela ? Que remarquez-vous de particulier pour l'intégrale  $J_3$  ?*

### Question 3

*De même, calculer les différentes erreurs commises pour l'intégrale*

$$J_4 = \int_0^1 \sqrt{x} dx. \quad (2)$$

*Quel comportement présentent les différentes méthodes d'intégration par rapport aux calculs précédents ? Pouvez-vous l'expliquer ?*

## 3. Étude expérimentale de la précision de ces méthodes

Soient  $f$ ,  $a$  et  $b$  fixés. On cherche maintenant à déterminer la précision des quatre méthodes étudiées. On considère, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'erreur méthodique commise par la  $i$ -ème méthode d'intégration ( $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) avec  $n$  points d'intégration :

$$\varepsilon(n) = \left| \int_a^b f(x) dx - I_i(n) \right|,$$

où  $I_i(n)$  désigne l'une des quatre valeurs approchées. On dit que la méthode d'intégration numérique est d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  si il existe une constante  $M$  telle que :

$$\varepsilon(n) \approx \frac{M}{n^\alpha}, \quad (3)$$

pour les «grandes» valeurs de  $n$ .

### Question 4

*Sous l'hypothèse (3), quelle relation a-t-on entre  $\log_{10}(n)$  et  $\log_{10}(\varepsilon(n))$  ?*

Ainsi, le nuage de points  $\{\log_{10}(n_k), \log_{10}(\varepsilon(n_k))\}$  (obtenus de façon empiriques), où  $n_k$  prend un nombre fini de valeurs, est une droite et la mesure de sa pente permet de déterminer la valeur  $\alpha$ .

Les valeurs entières de  $n_k$  formeront une distribution logarithmique de l'intervalle  $[10^{n_{\min}}, 10^{n_{\max}}]$  où  $n_{\min} < n_{\max}$  sont deux entiers donnés (par exemple  $n_{\min} = 0$  et  $n_{\max} = 5$ ). On pourra utiliser la fonction *logspace*( $n_{\min}, n_{\max}, p$ ) de matlab.

### Question 5

Écrire un programme matlab qui permette de tracer, pour  $a, b, f$  et une primitive de  $f$  donnés, le nuage de points  $\{\log_{10}(n_k), \log_{10}(\varepsilon(n_k))\}$ .

### Question 6

Mesurez de façon graphique l'ordre de convergence des quatre méthodes d'intégration pour l'évaluation numériques des intégrales  $J_1, J_2$  et  $J_3$  de (1). Ces valeurs corroborent elles les prévisions théoriques ? Laquelle des quatre méthodes d'intégration est elle la plus précise ?

### Question 7

Que constate-t-on sur l'ordre de convergence pour l'évaluation de l'intégrale  $J_4$  de (2) ? D'où cela provient-il ?

## 4. Étude expérimentale de la précision de ces méthodes pour des fonctions de primitives inconnues – Partie facultative

On cherche de nouveau à étudier l'erreur méthodique de chacune des quatre méthodes d'intégration, mais en utilisant des fonctions de primitives non connues. Ainsi, la démarche de la section 3 n'est plus valable. Cependant, si on note

$$\tilde{\varepsilon}(n) = |I_i(n) - I_i(2n)|,$$

alors, sous l'hypothèse (3),

$$\tilde{\varepsilon}(n) \approx \frac{2M}{n^\alpha}. \quad (4)$$

Ainsi, cette estimation permet, de façon similaire à la section 3, d'obtenir une estimation empirique de l'ordre de convergence  $\alpha$  de la méthode d'intégration.

### Question 8 – Facultatif

Mesurez de façon empirique l'ordre des quatre méthodes d'intégration sur les exemples suivants :

$$\int_0^1 Atan(x)dx, \quad \int_0^1 \frac{x^2 + x}{x^4 + x^2 + 1} dx.$$

### Question 9 – Facultatif

Mesurez de façon empirique l'ordre des quatre méthodes d'intégration sur l'exemple suivant :

$$\int_\eta^1 \ln(x) dx, \quad \text{où } \eta \in ]0, 1] \text{ et est «petit» devant 1.}$$

On pourra prendre  $\eta \in \{10^{-2}, 10^{-7}\}$ . Que remarquez-vous ?

**Question 10 – Facultatif**

*En fait, les primitives des fonctions  $\ln$  et  $x \mapsto \frac{x^2 + x}{x^4 + x^2 + 1}$  sont connues. Pourriez vous les donner ?*

**5. Étude expérimentale du nombre d'opérations élémentaires et du temps de calcul de ces quatre méthodes – Partie facultative**

**Question 11 – Facultatif**

*Modifiez le programme de la section 3 pour tracer respectivement le logarithme en base 10 du nombre d'opérations élémentaires et le temps de calcul de chacune des méthodes proposées. On tracera, comme précédemment, les nuages  $\{\log_{10}(n_k), t(n_k)\}$  et  $\{\log_{10}(n_k), \log_{10}(N(n_k))\}$  où  $N(n)$  et  $t(n)$  désignent respectivement le nombre d'opérations élémentaires et le temps de calcul pour une méthode d'intégration à  $n$  points. Que pouvez vous conclure de ces résultats ?*

**Question 12 – Facultatif**

*Quelles sont les complexités des quatre méthodes d'intégration à  $n$  points ?*