MT44 UTBM-année 2000/2001
TP numéro 3 Printemps 2001

MÉTHODES D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DE GAUSS

1. Objectifs

Le but de ce TP est d'implanter les méthodes d'intégration de Gauss-Legendre et de Gauss-Tchebychev. Pour la première (où les points et poids d'intégration ne sont pas connus explicitement), il s'agira de calculer les polynômes de Legendre et leurs racines et d'en déduire les poids et points de Gauss.

On comparera ces méthodes avec les méthodes d'intégrations précédemment vues et on conclura sur la supériorité de celles-là.

2. Méthode d'intégration de Gauss-Legendre

2.1. Étude et tracé des polynômes de Legendre

Question 1

À partir des relations de récurrence vues en cours fournissant les polynômes orthogonaux de Legendre $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} L_0 = 1, \\ L_1 = X, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad L_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1} X L_n - \dfrac{n}{n+1} L_{n-1}, \end{cases}$$

écrire une fonction donnant les polynômes de Legendre L_0, L_1, ..., L_n. *Tracer ces polynômes. Que constate-t-on graphiquement (sur la parité de polynômes et la répartition des racines par rapport à l'origine) ?.*

Question 2

Tracer les polynômes L_n *pour des valeurs de* n *de plus en plus grandes. Que se passe-t-il ?*

On rappelle la fonction *roots* de matlab qui calcule les racines d'un polynôme.

Question 3

Écrire une fonction matlab qui calcule les points de la formule d'intégration de Gauss-Legendre, c'est-à-dire, les zéros successifs de L_2, ..., L_{n+1} et les stocke dans un tableau.

Les poids de la formule d'intégration de Gauss-Legendre sont définis par

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad D_i = \frac{2}{(n+1)L'_{n+1}(x_i)\, L_n(x_i)}, \tag{1}$$

où les x_i sont les $n+1$ zéros de L_{n+1},

Question 4

Écrire une fonction matlab qui calcule les poids de la formule d'intégration de Gauss-Legendre et les stocke dans un tableau.

On vérifiera les fonctions programmées en comparant les poids D_0, ..., D_n et les points x_0, ..., x_n avec les valeurs données dans l'annexe (à la fin de l'énoncé).

2.2. Calcul de l'intégrale d'une fonction sur l'intervalle $[-1, 1]$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on rappelle que, si f est une fonction de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} D_i f(x_i),$$

où les points de Gauss x_0, ..., x_n sont les $n+1$ racines du polynômes L_{n+1} et les poids de Gauss D_0, ..., D_n sont calculés par (1).

Question 5

Écrire une fonction matlab ***intgausslegendre****(n,fcn) qui calcule cette valeur approchée. fcn est une chaîne de caractères représentant le nom de la fonction à intégrer (inline, built-in ou déclarée dans un fichier *.m). Les coefficients x_i et D_i seront calculés une fois pour toute, stockés dans un fichier (avec la fonction* save*) et récupérés à chaque utilisation (avec la fonction* load*).*

2.3. Calcul de l'intégrale d'une fonction sur l'intervalle $[a, b]$

Si a et b sont deux réels tels que $a < b$ et si g est une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n} D_i g\left(\frac{b-a}{2}(x_i+1)+a\right).$$

Question 6

Écrire une fonction matlab ***intgausslegendre****(n,fcn,a,b) qui calcule cette valeur approchée.*

Question 7

On testera cette fonction pour le calcul des trois intégrales suivantes (que l'on on comparera à leur valeur exacte)

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx, \quad I_2 = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx, \quad I_3 = \frac{3}{2}\int_0^1 \sqrt{x}\, dx. \tag{2}$$

Que se passe-t-il quand le nombre de points d'intégration est de plus en plus grand ?

Question 8

Pour les différentes intégrales de (2)*, combien faut il prendre de points d'intégration pour avoir une erreur inférieure à* 10^{-14} *? Comparer avec le nombre de points d'intégration qu'il aurait fallu prendre avec les méthodes d'intégration de Trapèzes ou de Simpson et conclure sur la supériorité de cette méthode de Gauss-Legendre, notamment en terme de nombre de calculs.*

Question 9 – Facultatif

Pour chacune des trois intégrales de (2)*, on pourra aussi tracer le graphe* $\big(\log_{10}(n), \log_{10}\big(\varepsilon(n)\big)\big)$*, où* n *est le nombre de points d'intégration pris en compte et* $\varepsilon(n)$ *est l'erreur commise.*

2.4. Comparaison avec des polynômes

Question 10 – Facultatif

Calculer l'erreur commise pour l'intégration d'un polynôme de degré p *(on pourra utiliser la fonction* polyval *et* polyint *de matlab). Que vaut cette erreur pour une formule à* $n+1$ *points si le degré* p *est inférieur ou égal à* $2n+1$ *?*

On admet la propriété suivante qui justifie la grande précision de la méthode de Gauss-Legendre :

Proposition 2.1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, la formule d'intégration de Gauss-Legendre à* $n+1$ *points est exacte pour tout polynôme de* $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$*.*

2.5. Test d'arrêt

Les fonctions précédemment programmées fournissent un calcul approché d'une intégrale pour un nombre n de points d'intégration spécifié. On désire maintenant écrire une fonction qui calcule la valeur d'une intégrale à la précision $\varepsilon > 0$. On peut remarquer que la fonction programmée calcule les premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, censée converger vers l'intégrale exacte. Ainsi, la valeur approchée sera atteinte quand la valeur u_n sera stationnaire, à la précision ε. On pourra donc calculer différentes valeurs de u_n et adopter comme test d'arrêt :

$$\left|\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}\right| \leq \varepsilon, \text{ si } |u_n| > eps,$$
$$|u_{n+1}-u_n| \leq \varepsilon, \text{ si } |u_n| \leq eps,$$

où *eps* est la précision machine.

Question 11

Faire une fonction ***intgausslegendretol****(*ε*, fcn,a,b) qui calcule la valeur approchée de l'intégrale d'une fonction avec la précision* ε *et la tester sur les trois calculs d'intégrales* (2) *; on prendra* $\varepsilon \in \big\{10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-10}, 10^{-12}, 10^{-15}, 10^{-20}\big\}$*. Que constatez-vous ?*

2.6. Calcul plus précis des poids et des points de Gauss-Legendre – *Partie facultative*

Voir complément.

2.7. Calcul de l'intégrale d'une fonction particulière

Question 12

Avec la méthode d'intégration de Gauss-Legendre, calculez l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx. \tag{3}$$

et montrez que $I = \pi/2$. Qu'en conclure sur la convergence de la méthode de Gauss-Legendre pour le calcul de I. Pouvez vous l'expliquer ?

Dans ce cas, vu la forme de l'intégrale (3), il faut changer de méthode d'intégration et utiliser la méthode d'intégration de Gauss-Tchebychev.

3. Méthode d'intégration de Gauss-Tchebychev

Pour $n \in \mathbb{N}$, on rappelle que, si f est une fonction de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, la formule d'intégration de Gauss-Tchebychev s'écrit

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \approx \sum_{i=0}^{n} D_i f\left(x_i\right), \tag{4}$$

où les points x_0, ..., x_n et les poids D_0, ..., D_n sont définis explicitement par :

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right),$$

$$D_i = \frac{\pi}{n+1}.$$

Question 13

Faire une fonction ***intgausstchebychev****(n,fcn) qui calcule l'intégrale* (4) *par la méthode de Gauss-Tchebychev et appliquez cela au calcul de l'intégrale* (3)*. Que constatez vous ?*

Question 14

Calculer de même l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Annexe A. Valeurs des premiers points et poids de Gauss-Legendre