MT44 — UTBM-année 2000/2001
TP numéro 3 — Printemps 2001

MÉTHODES D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DE GAUSS

PARTIE FACULTATIVE

Question 1

Comparez les poids et les points de Gauss-Legendre avec les tables fournies en annexes. Que se passe-t-il pour $n = 40$ *?*

Question 2

Avec la fonction intgausslegendretol, *calculer*

$$I = \int_1^{100} \ln(x)\, dx \tag{1}$$

en prenant des valeurs de plus en plus petite de la précision ε *en la comparant à sa valeur exacte. Que se passe-t-il ?*

Il existe, en fait, un autre moyen de calculer les poids et les points de Gauss-Legendre ; en effet, dans la méthode proposée dans ce TP, les polynômes de Legendre sont évalués explicitement, et, compte tenu des grandes valeurs de leurs coefficients, ils « explosent » numériquement et on ne peut plus calculer leurs zéros quand n est trop grand. On propose, dans cette section, un autre calcul ne faisant par directement intervenir les polynômes P_n ; cette méthode est donc plus stable (bien que plus longue avec matlab).

Question 3

Montrer que, si on pose

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad L_p^* = \sqrt{p + \frac{1}{2}}\, L_p,$$
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_p = \frac{p}{\sqrt{4p^2 - 1}},$$

on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_{p+1} L_{p+1}^* + \beta_p L_{p-1}^* = X L_p^*, \tag{2}$$

et que, si on pose $L^*_{-1}=0$, (2) est encore valable pour $p=0$. En déduire que, dans $\mathbb{R}[X]$, on a

$$\forall n \geq 2, \quad X \begin{pmatrix} L^*_0 \\ L^*_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ L^*_{n-2} \\ L^*_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-2} & 0 & \beta_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^*_0 \\ L^*_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ L^*_{n-2} \\ L^*_{n-1} \end{pmatrix} + \beta_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ L^*_n \end{pmatrix}.$$

Soient x_0, ..., x_{n-1} les racines de L_n.

Question 4

En admettant que

$$\forall i \in \{0, ..., n-1\}, \quad L^*_{n-1}(x_i) \neq 0,$$

Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$x_0, \ ..., \ x_{n-1} \textit{ sont les valeurs propres de } M = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-2} & 0 & \beta_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

On admettra que, pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$, si y_i est la première composante d'un vecteur propre normé de M, associé à la valeur propre x_i, alors

$$D_i = 2y_i^2, \tag{4}$$

où les coefficients D_i sont les poids de la formule à n points.

Ainsi, grâce à (3) et (4), on peut déterminer les poids D_i et les points x_i de la formule d'intégration de Gauss-Legendre à n points.

Avec matlab, il existe la fonction *eig* qui permet de diagonaliser des matrices carrées. Cependant, la matrice M de (3) est tridiagonale et creuse (elle possède beaucoup d'éléments nuls) et matlab gère très bien ce type de structure ; regarder sur l'aide ce que font les fonctions *sparse*, *diag*, *eigs*, *gallery*.

Question 5

Que fait la séquence suivante : U=1./sqrt(4-1./(1 : n-1).^2) ; A=gallery('tridiag',U,zeros(1,n),U) ; [Q,R]=eigs(A,n) ;

Question 6

En ordonnant les valeurs propres trouvées numériquement, écrire une fonction qui calcule les poids et les points de Gauss-Legendre. Comparez ces valeurs avec celles de tables numériques. Calculez de nouveau les trois intégrales I_1, I_2 et I_3. Constatez vous que le calcul est plus stable. Calculez de nouveau, grâce aux nouveaux coefficients calculés, l'intégrale (1).