

**Corrigé de l'examen médian du 3 mai 2005**

**Correction de l'exercice 1.**

(1) *Étude sur une partie  $[x_0, x_1]$  de  $[A, B]$*

On considère les réels  $x_0$  et  $x_1$  tels que  $x_0 < x_1$  et  $[x_0, x_1] \subset [A, B]$ . cette hypothèse assure que la fonction  $f$  est définie, continue, (car) dérivable sur le grand «intervalle»  $[A, B]$ .

- (a) L'expression de  $l_0(x)$  et  $l_1(x)$  pour tout  $x$  de  $[A, B]$  relève du cours directement, donc n'est pas rappelée ici.
- (b) Les valeurs cherchées sont les suivantes :

$$l_0(x_0) = 1; \quad l_1(x_1) = 1; \quad l_0(x_1) = 0; \quad l_1(x_0) = 0,$$

parce que les Lagrange ont été créés pour cela, pour vérifier cette propriété «d'orthogonalité» qui fait leur intérêt (voir proposition 2.1). Les réponses données en médian doivent être fondées ; le fait de «balancer» les résultats sans arguments ne suffit pas : les points accordés en dépendent évidemment. Il s'agit de sciences, pas de pêche à la ligne. De façon générale, en sciences, un résultat juste sans arguments n'existe pas ; c'est dur mais c'est la règle du métier. Elle en fait aussi la beauté !

- (c) (i) Pour tout  $j$  de  $\{0, 1\}$ , les  $b_j$  sont des fonctions polynômes de degré 3 car produit du bloc  $[l_j(x)]^2$ , (de degré 2 par la même proposition 2.1) et de  $[1 - 2l'_j(x_j)(x - x_j)]$  de degré 1 visiblement, car  $l'_j(x_j)$  est non nul. De même, pour tout  $j$  de  $\{2, 3\}$ , les  $b_j$  sont des fonctions polynômes de degré 3 car produit du bloc  $[l_{j-2}(x)]^2$ , de degré 2 ) et de  $(x - x_{j-2})$  de degré 1 visiblement.
- (ii) On sépare à nouveau le cas  $j$  dans  $\{0, 1\}$  et  $j$  dans  $\{2, 3\}$ . Les fonctions considérées sont dérivables sur l'intervalle considéré puisque polynômes.

–  $i$  dans  $\{0, 1\}$

On utilise les relations de dérivation d'un produit et de fonctions composées. D'où  $([l_i(x)]^2)' = 2l'_i(x)l_i(x)$ . Il vient :

$$\forall i \in \{0, 1\} \quad \forall x \in [A, B] \quad b'_i(x) = -2l'_i(x_i)[l_i(x)]^2 + [1 - 2l'_i(x_i)(x - x_i)]2l'_i(x)l_i(x).$$

– Pour  $j = i + 2$  et  $i \in \{0, 1\}$ , on obtient de même :

$$\forall i \in \{0, 1\} \quad \forall x \in [A, B] \quad b'_{i+2}(x) = 1.[l_i(x)]^2 + (x - x_i)2l'_i(x)l_i(x).$$

*Remarque 1.* Cette écriture est idéale pour la suite puisque l'expression est donnée en fonction des  $l_i(x)$  qui ont des expressions très simples en les points du support. Le retour à des expressions dans la base canonique relèvent de tics, ne prenant pas en compte les apports de mt44, signalés par les enseignants. Il convient de cesser de privilégier la base canonique dont on a vu qu'elle a de mauvais effets en termes numériques.

- (iii) Les relations demandées sont très simples à obtenir si l'on a pris soin de ne pas «casser» la présence des écritures pertinentes annoncées ci-dessus. Tout autre calcul est «bovin» et prend du temps, car il tue «l'intelligence» des phénomènes ; il suffit de voir le comportement des blocs préservés grâce aux propriétés fondamentales des Lagrange. Pour tout  $(i, k)$  de  $\{0, 1\}^2$  :

$$b_i(x_k) = \partial_{ik} \quad \text{et} \quad b_{2+i}(x_k) = 0;$$

$$b'_i(x_k) = 0 \quad \text{et} \quad b'_{2+i}(x_k) = \partial_{ik},$$

- (iv) Les  $\{b_j\}_{0 \leq j \leq 3}$  forment une famille de quatre vecteurs d'un espace vectoriel de dimension quatre. En conséquence, comme dans la preuve de la proposition 2.1 précitée, il suffit de prouver que cette famille est libre ; elle formera base de  $\mathcal{P}_3$ . Il convient donc de montrer qu'en notant  $\omega$  la fonction nulle :

$$[\alpha_0.b_0 + \alpha_1.b_1 + \alpha_2.b_2 + \alpha_3.b_3 = \omega] \Rightarrow [\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0].$$

Prenons pour hypothèse le bloc gauche de l'implication. Comme il s'agit d'une égalité fonctionnelle, elle est vérifiée pour tout  $x$  de  $[A, B]$  et aussi pour sa dérivée qui existe

Par conséquent, pour tout  $x$  de  $[A, B]$  l'hypothèse s'écrit :

$$\alpha_0.b_0(x) + \alpha_1.b_1(x) + \alpha_2.b_2(x) + \alpha_3.b_3(x) = \omega(x) = 0.$$

En particulier ceci est vrai pour les points du support,  $x_0$  et  $x_1$ . On utilise alors les bonnes propriétés établies au point (c) précédent, en remplaçant successivement  $x$  par  $x_0$  puis  $x_1$ . Ceci donne  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ .

Ayant remarqué que l'hypothèse permettait d'affirmer aussi que

$$(\alpha_0.b_0 + \alpha_1.b_1 + \alpha_2.b_2 + \alpha_3.b_3)' = \omega' = \omega$$

on traduit à nouveau cette égalité fonctionnelle en remplaçant successivement  $x$  par  $x_0$  puis  $x_1$ . Ceci donne  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . La preuve est terminée.

- (d) (i) On remplace successivement  $x$  par  $x_0$  puis  $x_1$  dans l'écriture de  $p(x)$  puis de  $p'(x)$  ; ceci donne :

$$p(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad p'(x_i) = y'_i.$$

- (ii)  $p$  est le polynôme d'interpolation de  $f$  sur le support  $\{x_0, x_0, x_1, x_1\}$ , puisque celui-ci est unique et que  $p$  coïncide avec  $f$  et  $f'$  en les points du support.

- (iii) La fonction polynôme  $p$  interpole  $f$  sur  $\{x_0, x_1\}$  puisque sa courbe représentative passe par les même points que celle de  $f$  aux abscisses  $x_0$  et  $x_1$ ; les tangentes aux courbes représentatives de  $f$  et du polynôme interpolateur  $p$  coïncident en ces mêmes points. C'est précisément l'objectif des fonctions splines dont la théorie proposée dans ce médian, dûe à Hermite, est annonciatrice.
- (e) (i) On remarque de suite que  $y_0 = y'_1 = 0$ . Vu l'expression de  $p(x)$  ceci rend inutile la détermination de  $b_0$  et  $b_3$ . Ainsi pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  on a :

$$p(x) = b_1(x) + b_2(x).$$

On en déduit pour tout  $x$  réel :

$$p(x) = \frac{4}{\pi^2} \left(1 - \frac{4}{\pi}\right) x^3 + \frac{4}{\pi} \left(\frac{3}{\pi} - 1\right) x^2 + x.$$

- (ii) Etude de  $f$  et de  $p$  sur  $[0, \pi/2]$

– Étude de  $f$  La fonction sinus est définie, continue sur  $[0, \pi/2]$  puisque dérivable sur ce même intervalle

Etude des variations : On sait que  $f''(x) = \cos x$ , positive sur  $[0, \pi/2]$ . On en déduit immédiatement le tableau de variation de  $f$  sur l'intervalle d'étude.

$x$	0	$\pi/2$
$f'(x)$	1 + 0	
$f(x)$	↗ 1	

Allure de courbe représentative Voir le graphique issu de matlab joint.

– Étude de  $p$

La fonction  $p$  est définie, continue, dérivable sur  $[0, \pi/2]$  puisque polynôme. Pour sa détermination on pourra consulter le fichier joint nommé annexe1.pdf, qui montre comment effectuer les calculs en symbolique depuis matlab (ou maple!).

Variations

On détermine le nombre dérivé de  $p$  en  $x$  quelconque de l'intervalle considéré.

$$p'(x) = \frac{12}{\pi^2} \left(1 - \frac{4}{\pi}\right) x^2 + \frac{8}{\pi} \left(\frac{3}{\pi} - 1\right) x + 1.$$

Cette quantité s'annule pour deux valeurs réelles, l'une négative, l'autre évidemment égale à  $\pi/2$  comme le laisse attendre la théorie antérieure. Il vient le tableau de variation suivant :

$x$	0	$\pi/2$
$p'(x)$	1 + 0	
$p(x)$	↗ 1	

On remarque en particulier sur cette table que les fonctions interpolée et interpolante coïncident aux points du support en valeurs et dérivées, comme annoncé. De plus les points de support au nombre de deux travaillent encore comme s'ils

étaient quatre donc fournissent une excellente interpolation sans surcoût pour l'ingénieur en termes de nombre de mesures du phénomène à étudier.

Voir graphique issu de matlab joint au format.jpeg nommé annexe2.jpeg.

- (2) (a) L'intérêt géométrique de la fonction polynôme par morceaux,  $P$  définie par :

$$\forall x \in [A, B] \quad [(x \in [x_i, x_{i+1}]) \Rightarrow (P(x) = p_i(x))] ?$$

est d'interpoler la fonction  $f$  proposée en imposant un raccord des dérivées d'ordre 1 aux points du support. Il s'agit de l'outil spline, qui fournit des raccords de qualité entre les différents fonctions polynomiales par morceaux.

- (b) A partir de la suite  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  et de la donnée des  $(f(x_i))_{0 \leq i \leq n}$  et  $(f'(x_i))_{0 \leq i \leq n}$ , on peut opérer comme suit :

- Pour chaque sous-intervalle considéré  $[x_i, x_{i+1}]$ , pour  $i$  variant entre 0 et  $n - 1$ , on détermine comme à la question précédente la fonction polynomiale qui interpole  $f$  à l'ordre 3 par morceaux en «préservant» les tangentes en bord de chaque sous-intervalle.
- On concatène alors les différentes fonctions polynomiales obtenues.

Remarque : cette méthode est moins performante que celle obtenue en utilisant les outils du cours de mt44, autant en termes temporels pour les calculs, qu'en termes qualitatifs par la diversité de situations que peuvent traiter les concepts introduits sous mt44. Ils dépassent en qualité nettement cette approche des splines fidèles à l'histoire qui les a vus naître.

### Correction de l'exercice 2.

Soient les intégrales

$$I_{A,B} = \int_A^B \cos(w^2) dw, \tag{1a}$$

$$J_{A,B} = \int_A^B \sin(w^2) dw. \tag{1b}$$

- (1) Les fonctions  $c$  et  $s$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  sont définies par

$$\forall w \in \mathbb{R}, \quad c(w) = \cos(w^2), \tag{2a}$$

$$s(w) = \sin(w^2). \tag{2b}$$

- (a) On calcule successivement les dérivées de  $c$  et de  $s$  et on obtient

$$\forall w \in \mathbb{R}, \quad c^{(4)}(w) = -12 \cos(w^2) + 48w^2 \sin(w^2) + 16w^4 \cos(w^2), \tag{3a}$$

$$s^{(4)}(w) = -12 \sin(w^2) - 48w^2 \cos(w^2) + 16w^4 \sin(w^2). \tag{3b}$$

On en déduit, en majorant les normes des sinus et des cosinus par un :

$$\forall w \in \mathbb{R}, \quad |c^{(4)}(w)| \leq g(w), \tag{4a}$$

$$|s^{(4)}(w)| \leq g(w), \tag{4b}$$

où la fonction  $g$  est définie par

$$\forall w \in \mathbb{R}, \quad g(w) = 12 + 48w^2 + 16w^4. \tag{4c}$$

(b) La fonction  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et décroissante sur  $\mathbb{R}_-$  comme les fonctions :  $w \mapsto w^2$  et :  $w \mapsto w^4$ .

(c) Pour tout la suite, on suppose que les bornes  $A$  et  $B$  d'intégration vérifient

$$0 \leq A < B \leq 1. \quad (5)$$

Puisque  $g(0) = 12$  et  $g(1) = 76$ , on déduit de la question précédente que

$$\forall w \in [A, B], \quad |c^{(4)}(w)| \leq 76, \quad (6a)$$

$$|s^{(4)}(w)| \leq 76. \quad (6b)$$

*Remarque 2.* On pouvait aussi utiliser la fonction à valeurs complexes :  $w \mapsto e^{iw}$  et arriver plus rapidement à ces résultats, en calculant la dérivée quatrième de cette fonction puis en majorant le module.

(2) D'après le cours, on a, pour la méthode de Simpson :

$$E_N^S = -\frac{1}{2880}(B-A)h^4 c^{(4)}(\xi_c), \text{ où } \xi_c \in [A, B], \quad (7a)$$

$$F_N^S = -\frac{1}{2880}(B-A)h^4 s^{(4)}(\xi_s), \text{ où } \xi_s \in [A, B], \quad (7b)$$

dont on déduit alors, grâce à (6a) et (6b)

$$|E_N^S| \leq \frac{19}{720}(B-A)h^4, \quad (8a)$$

$$|F_N^S| \leq \frac{19}{720}(B-A)h^4. \quad (8b)$$

Puisque  $h = (B-A)/N$ , on a donc

$$N_{\min} = E \left( \left( \frac{19}{720\varepsilon} \right)^{1/4} (B-A)^{5/4} \right) + 1. \quad (9)$$

(3) *Applications numérique*

On donne  $A = 0$ ,  $B = 1$  et  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

On obtient  $N = 5$  et la méthode de Simpson fournit

$$I_{A,B} \approx 0.9045242678623499, \quad (10a)$$

$$J_{A,B} \approx 0.3102602344332209. \quad (10b)$$

*Remarque 3.* On trouve, grâce à matlab, les approximations suivantes à  $10^{-16}$  près :

$$I_{A,B} \approx 0.9045242379002720, \quad (11a)$$

$$J_{A,B} \approx 0.3102683017233811. \quad (11b)$$

On peut vérifier que les erreurs commises sont inférieures à  $3 \times 10^{-8}$  et  $9 \times 10^{-6}$ , ce qui corrobore les résultats établis.

(4) Soit  $P$  un entier non nul. On pose  $\tau = 1/P$  et, pour tout  $j \in \{0, \dots, P\}$ ,  $Y_j = j\tau$ .

(a) Il est immédiat que :

$$\boxed{I_{0,Y_0} = 0,} \quad (12a)$$

$$\boxed{J_{0,Y_0} = 0.} \quad (12b)$$

Par ailleurs, la formule de Chasles pour les intégrales fournit

$$\boxed{\forall j \in \{1, \dots, P\}, \quad I_{0,Y_j} = \sum_{k=0}^{j-1} I_{Y_k, Y_{k+1}},} \quad (12c)$$

$$\boxed{\forall j \in \{1, \dots, P\}, \quad J_{0,Y_j} = \sum_{k=0}^{j-1} J_{Y_k, Y_{k+1}}.} \quad (12d)$$

(b) On note  $e_{P,j}$  et  $f_{P,j}$  les erreurs d'intégration commise pour le calcul respectifs de  $I_{0,Y_j}$  et  $J_{0,Y_j}$  en utilisant les formules (12) et où chaque intégrale  $I_{Y_k, Y_{k+1}}$  et  $J_{Y_k, Y_{k+1}}$  est approchée numériquement par la méthode de Simpson à  $N + 1$  point l'intervalle  $[Y_k, Y_{k+1}]$ .

Il est inutile de refaire des calculs déjà faits en cours. Il suffit de constater que les formules (12c) et (12d) peuvent être vues comme une méthode «sur-composée» : chaque intégrale  $I_{Y_k, Y_{k+1}}$  et  $J_{Y_k, Y_{k+1}}$  est approchée numériquement grâce à la méthode (composée) de Simpson, avec les erreurs définies par (grâce à (7) où  $B - A$  est remplacé par  $Y_{k+1} - Y_k = \tau$ ) :

$$E_{N,k}^S = -\frac{1}{2880}\tau h^4 c^{(4)}(\xi_{c,k}), \text{ où } \xi_{c,k} \in [Y_k, Y_{k+1}],, \quad (13a)$$

$$F_{N,k}^S = -\frac{1}{2880}\tau h^4 s^{(4)}(\xi_{s,k}), \text{ où } \xi_{s,k} \in [Y_k, Y_{k+1}]. \quad (13b)$$

On raisonne comme dans le cours (voir [BM03], section 3.2.2 page 89) : chaque intégrale  $I_{Y_k, Y_{k+1}}$  et  $J_{Y_k, Y_{k+1}}$  joue le rôle des méthodes élémentaires et les intégrales  $I_{0,Y_j}$  et  $J_{0,Y_j}$  jouent le rôle des méthodes composées ; on montre que les erreurs  $e_{P,j}$  et  $f_{P,j}$  sont alors les sommes respectives des erreurs  $E_{N,j}^S$  et  $F_{N,j}^S$ . On écrit, par exemple, que

$$e_{P,j} = \sum_{k=0}^{j-1} E_{N,k}^S = -\frac{1}{2880}\tau h^4 \sum_{k=0}^{j-1} c^{(4)}(\xi_{c,k}).$$

En utilisant l'analogue du lemme 3.25 page 92 de [BM03], on montre alors que

$$e_{P,j} = -\frac{1}{2880}\tau h^4 j c^{(4)}(\xi_c),$$

où  $\xi_c$  appartient à  $[0, 1]$ . On en déduit, grâce à (6a), que

$$|e_{P,j}| = \frac{76}{2880}\tau h^4 j = \frac{19}{720}\tau h^4 P = \frac{19}{720}h^4.$$

On fait de même pour  $f_{P,j}$ . Bref, on a

$$\boxed{\forall j \in \{0, \dots, P\}, \quad |e_{P,j}| \leq \frac{19}{720}h^4,} \quad (14a)$$

$$\boxed{|f_{P,j}| \leq \frac{19}{720}h^4.} \quad (14b)$$

Comme dans la question 2, on en déduit que le nombre  $N_{\min}$  garantissant une erreur d'intégration inférieure à  $\varepsilon > 0$  pour les deux intégrales  $I_{0,Y_j}$  et  $J_{0,Y_j}$ , pour tout  $j \in \{0, \dots, P\}$  :

$$\boxed{N_{\min} = E \left( \left( \frac{19}{720\varepsilon} \right)^{1/4} \right) + 1.} \quad (15)$$

*Remarque 4.* Les nombres  $I_{0,Y_j}$  et  $J_{0,Y_j}$  interviennent dans le calcul de la «clohoïde» courbe qui permet de raccorder une droite à un cercle de telle sorte que le rayon de courbure augmente proportionnellement avec l'abscisse curviligne. Cette propriété est utilisée dans le calcul de trajectoire de route ou de voie ferrée, paramétrée par :

$$\forall s \in [0, s_A], \quad x(s) = \int_0^s \cos \left( \frac{u^2}{k^2} \right) du = k \int_0^{s/k} \cos(w^2) dw, \quad (16a)$$

$$y(s) = \int_0^s \sin \left( \frac{u^2}{k^2} \right) du = k \int_0^{s/k} \sin(w^2) dw. \quad (16b)$$

Pour plus de détails, voir l'exercice 2 de l'examen médian de MT25 du 28 avril 2006 et son corrigé, disponibles sur le web à l'adresse <http://utbmjb.chez-alice.fr/>, rubrique MT25.

## Références

- [BM03] Jérôme Bastien et Jean-Noël Martin. *Introduction à l'analyse numérique ; applications sous matlab*. Dunod, Paris, 2003.