

Systèmes dynamiques discrets avec frottement et  
 Identification en biomécanique  
 Soutenance du mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches

Jérôme Bastien

Centre de Recherche et d'Innovation sur le Sport – Université Lyon I

18 Septembre 2013

Première partie : Systèmes dynamiques discrets avec frottement

Deuxième partie : Interlude

Troisième partie : Identification en biomécanique

- Ces transparents sont nombreux et n'ont pas tous été présentés lors de la soutenance orale ! Voir la partie Compléments.
- Ils correspondent à la soutenance orale de ([d2]) : J. Bastien. "Systèmes dynamiques discrets avec frottement et Identification en biomécanique". Disponible sur [http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/liste\\_publicis.html](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/liste_publicis.html) à la référence « [d2] ». Numéro d'ordre : 26-2013. Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches. Soutenance prévue le 18 septembre. Université Lyon I, 2013
- Le lecteur pourra aussi se référer à l'ouvrage ([o2]) : J. Bastien, F. Bernardin et C.-H. Lamarque. *Systèmes dynamiques discrets non réguliers déterministes ou stochastiques. applications aux modèles avec frottement ou impact*. Collection Mécanique des structures. Ouvrage traduit en anglais (voir [o2b]). Voir <http://www.lavoisier.fr/livre/h3908.html> Disponible à la BU Sciences de Lyon 1 (cote : 74 BASTIEN, UFR Maths, sous-sol). Hermès Science Publications, 2012. 532 pages

Les numéro de sections de ces transparents correspondent au numéro de chapitres du mémoire [d2].

- **Auteur** : Jérôme Bastien (<http://utbmjb.chez-alice.fr>)
- **Numéro d'ordre** : 26-2013
- **Laboratoire** :  
Centre de Recherche et d'Innovation sur le Sport (CRIS),  
UFRSTAPS,  
Université de Lyon, Université Claude Bernard - Lyon 1,  
27-29 Bd du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex,  
France  
<http://cris.univ-lyon1.fr/>
- **Email** : [jerome.bastien@univ-lyon1.fr](mailto:jerome.bastien@univ-lyon1.fr)
- **Emplacement Internet où ce document est disponible** :  
[http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/liste\\_publicis.html](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/liste_publicis.html)  
à la référence « [d2] » (section « Divers »)

Ce mémoire est consacré à l'étude de systèmes dynamiques discrets avec frottements et à des problèmes d'identification en biomécanique.

La première partie concerne des résultats théoriques d'unicité, de convergence et d'analyse numérique de solutions d'équations différentielles non linéaires pour étudier des modèles dynamiques discrets contenant des non-linéarités. Ces non-linéarités sont introduites pour prendre en compte des modèles de frictions *via* des inclusions différentielles maximales monotones, essentiellement en dimension finie. De nombreux exemples ainsi que des applications sont fournis avec des simulations numériques.

La seconde partie est consacrée à la résolution de certains problèmes d'identification en biomécanique : identification d'espaces de travail, de paramètres cinématiques lors de la modélisation de certains mouvements et de paramètres anthropométriques dans le cadre de la dynamique inverse.

This report is devoted to the study of discrete dynamical systems with friction and to problems of identification in biomechanics. The first part concerns theoretical results of existence, uniqueness and numerical analysis of solutions of non linear differential equations to treat discrete models of dynamical systems involving non smooth nonlinearities. These non smooth nonlinearities are introduced to take into account friction models *via* maximal monotone differential inclusions of mainly finite dimensional dynamical systems. Some examples and applications are given, with numerical simulations.

The second part is related to the resolution of some problems of identification in biomechanics: identification of workspaces, of cinematic parameters for modelization of some movements and of anthropometrical parameters for inverse dynamics.

## Première partie I

# Systemes dynamiques discrets avec frottement

# Plan

- 1 Théorie sur les inclusions différentielles modélisant le frottement
- 2 Association de modèles simples et présentation des modèles composés
- 3 Applications
- 4 Problèmes de frottement mal posés

# Plan

- 1 Théorie sur les inclusions différentielles modélisant le frottement
- 2 Association de modèles simples et présentation des modèles composés
- 3 Applications
- 4 Problèmes de frottement mal posés

## Un premier exemple simple

On étudie le mouvement d'un solide de masse  $m$ , d'abscisse  $x$  et soumis à un frottement de Coulomb  $g(t)$  et à une sollicitation externe  $F(t)$ .

La RFD fournit

$$m\ddot{x}(t) - g(t) = F(t)$$

On introduit un opérateur multivoque, c'est-à-dire une application de  $\mathbb{R}$  dans l'ensemble des parties de  $\mathbb{R}$ . Soit donc  $\sigma$  donné par

$$\sigma(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0, \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (1)$$

## Un premier exemple simple

On étudie le mouvement d'un solide de masse  $m$ , d'abscisse  $x$  et soumis à un frottement de Coulomb  $g(t)$  et à une sollicitation externe  $F(t)$ .

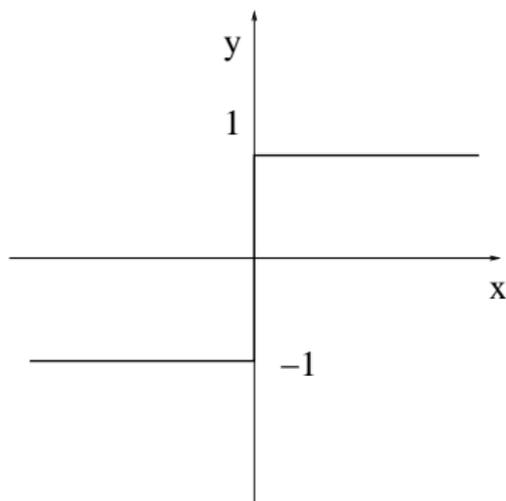
La RFD fournit

$$m\ddot{x}(t) - g(t) = F(t)$$

On introduit un opérateur multivoque, c'est-à-dire une application de  $\mathbb{R}$  dans l'ensemble des parties de  $\mathbb{R}$ . Soit donc  $\sigma$  donné par

$$\sigma(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0, \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (1)$$

# Le gaphe signe



On peut aussi voir l'opérateur comme une partie de  $\mathbb{R}^2$ . On a tout simplement :

$$g(t) \in -\alpha\sigma(\dot{x}(t)). \quad (2)$$

# L'inclusion différentielle simple

Il vient

$$m\ddot{x}(t) + \alpha\sigma(\dot{x}(t)) \ni F(t)$$

soit encore en considérant la vitesse

$$\dot{y}(t) + \frac{\alpha}{m}\sigma(y(t)) \ni \frac{1}{m}F(t) \quad (3)$$

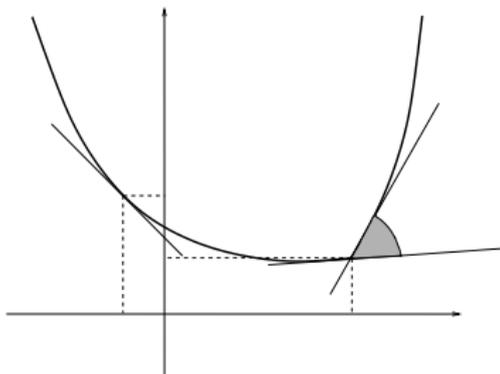
Sous-différentiel de fonctions convexes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ 

## Définition

Si  $\phi$  est convexe propre, le sous-différentiel  $\partial\phi$  de  $\phi$  est l'opérateur multivoque défini de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$y \in \partial\phi(x) \iff \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \phi(\xi) \geq y(\xi - x) + \phi(x). \quad (4)$$

L'inéquation (4) signifie que  $y$  est la pente d'une droite qui passe par le point  $(x, \phi(x))$  et qui se trouve entièrement sous le graphique de  $\phi$ .



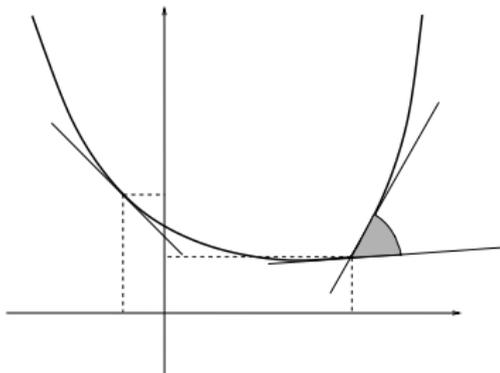
Sous-différentiel de fonctions convexes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ 

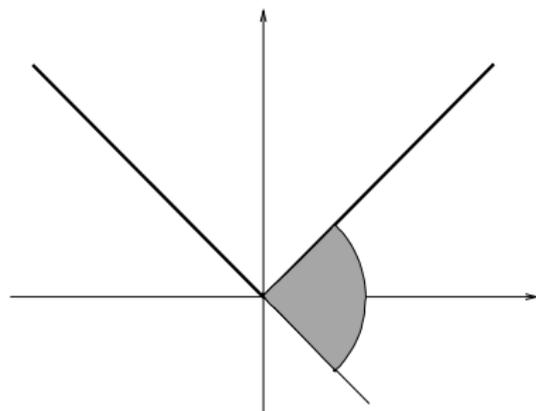
## Définition

Si  $\phi$  est convexe propre, le sous-différentiel  $\partial\phi$  de  $\phi$  est l'opérateur multivoque défini de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par

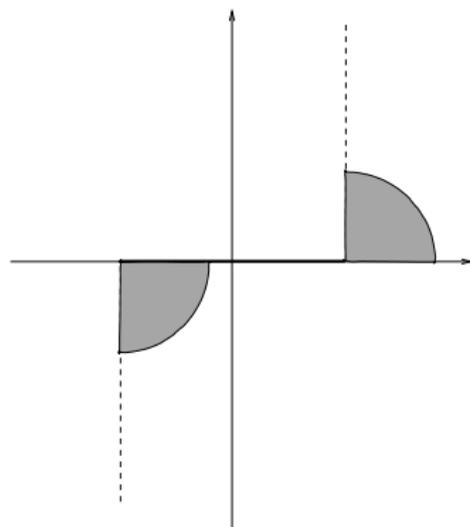
$$y \in \partial\phi(x) \iff \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \phi(\xi) \geq y(\xi - x) + \phi(x). \quad (4)$$

L'inéquation (4) signifie que  $y$  est la pente d'une droite qui passe par le point  $(x, \phi(x))$  et qui se trouve entièrement sous le graphique de  $\phi$ .



Sous-différentiel de fonctions convexes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ Exemple des graphes  $\sigma$  et  $\beta$ 

$$\beta(x) = \begin{cases} \mathbb{R}_- & \text{si } x = -1, \\ \mathbb{R}_+ & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x \in ]-1, 1[, \\ \emptyset & \text{si } x \notin [-1, 1]. \end{cases} \quad (5)$$



# Sous-différentiel de fonctions convexes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

## Aspect maximal monotone

- Les sous-différentiels de fonctions convexes propres et s.c.i. sont maximaux monotones.
- Pour tout opérateur  $A$ , maximal monotone, et pour tout  $\lambda > 0$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists ! x \in \mathbb{R}, \quad x + \lambda Ax \ni y. \quad (6)$$

- On peut donc considérer la résolvante  $(I + \lambda A)^{-1}$  de  $A$ .
- Les résolvantes de  $\sigma$  et de  $\beta$  sont données par

$$(I + \lambda\sigma)^{-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\lambda, \lambda], \\ 1 - \lambda & \text{si } x \geq \lambda, \\ 1 + \lambda & \text{si } x \leq -\lambda, \end{cases} \quad (7)$$

$$(I + \lambda\beta)^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 1 & \text{si } x \geq 1, \\ -1 & \text{si } x \leq -1. \end{cases} \quad (8)$$

# Sous-différentiel de fonctions convexes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

## Aspect maximal monotone

- Les sous-différentiels de fonctions convexes propres et s.c.i. sont maximaux monotones.
- Pour tout opérateur  $A$ , maximal monotone, et pour tout  $\lambda > 0$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists ! x \in \mathbb{R}, \quad x + \lambda Ax \ni y. \quad (6)$$

- On peut donc considérer la résolvante  $(I + \lambda A)^{-1}$  de  $A$ .
- Les résolvantes de  $\sigma$  et de  $\beta$  sont données par

$$(I + \lambda\sigma)^{-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\lambda, \lambda], \\ 1 - \lambda & \text{si } x \geq \lambda, \\ 1 + \lambda & \text{si } x \leq -\lambda, \end{cases} \quad (7)$$

$$(I + \lambda\beta)^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 1 & \text{si } x \geq 1, \\ -1 & \text{si } x \leq -1. \end{cases} \quad (8)$$

# Extension à un espace de Hilbert $H$ quelconque (séparable)

Toutes les définitions précédentes s'étendent à condition de remplacer le produit de  $\mathbb{R}$  par un produit scalaire sur  $H$  :  
monotonie, maximalité, sous-différentiels, résolvante.

# Existence, unicité et schéma numérique

- On considère  $A$  maximal monotone sur  $H$  et  $f$  assez régulière. D'après [Bré73], existence et unicité de la solution de l'inclusion différentielle qui généralise (3) :

$$\dot{u}(t) + A(u(t)) \ni f(t, u(t)), \quad (9)$$

avec une condition initiale.

- Dans *tous* les cas que l'on a rencontrés,  $A = \partial\phi$ .
- Le schéma numérique d'Euler implicite s'écrit

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{h} + A(U^{n+1}) \ni f(t_n, U^n), \quad (10)$$

équivalent selon (6) à

$$U^{n+1} = (I + \lambda A)^{-1} (hf(t_n, U^n) + U^n). \quad (11)$$

Dans *de nombreux cas*,  $A$  est découplé et sa résolvante est exprimée en fonction des résolvantes des graphes  $\sigma$  et  $\beta$ .

# Existence, unicité et schéma numérique

- On considère  $A$  maximal monotone sur  $H$  et  $f$  assez régulière. D'après [Bré73], existence et unicité de la solution de l'inclusion différentielle qui généralise (3) :

$$\dot{u}(t) + A(u(t)) \ni f(t, u(t)), \quad (9)$$

avec une condition initiale.

- Dans *tous* les cas que l'on a rencontrés,  $A = \partial\phi$ .
- Le schéma numérique d'Euler implicite s'écrit

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{h} + A(U^{n+1}) \ni f(t_n, U^n), \quad (10)$$

équivalent selon (6) à

$$U^{n+1} = (I + \lambda A)^{-1} (hf(t_n, U^n) + U^n). \quad (11)$$

Dans *de nombreux cas*,  $A$  est découplé et sa résolvante est exprimée en fonction des résolvantes des graphes  $\sigma$  et  $\beta$ .

# Quelques résultats existants : existence et unicité

Sur l'inclusion  $\dot{u} + A(u) \ni f(., u)$  :

$A$	$f(t, u)$	Rés.	Références	
O.M.M.	$f(t, u)$	$\exists !$	Brézis, 1973, [Bré73]	
sous-diff	$g(t) - B(u)$	$\exists !$	Brézis, 1972, [Bré72]	$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$
multivo.	$f(t, u)$	$\exists (!)$	Dontchev et Lempio, 1992, [DL92]	$\dot{u} \in F(., u)$

# Quelques résultats existants : convergence du schéma

Sur l'inclusion  $\dot{u} + A(u) \ni f(., u)$  :

$A$	$f(t, u)$	Conv.	Références
O.M.M.	$f(t, u)$	conv. seule	Crandall et Evans, 1975, [CE75]
O.M.M.	$f(t, u)$	ordre 1 ( $C^1$ p.m)	Elliott, 1985, [Ell85]
O.M.M. sous-diff	0 0	ordre 1/2 <small>optm.</small> ordre 1	Rulla, 1996, [Rul96]
sous-diff $\partial I_C$	$g(t) - B(u)$ $g(t) - B(u)$	ordre 1/2 ordre 1	Lippold, 1990, [Lip90]
mult.	$f(t, u)$	$C^\uparrow$ : ordre $\uparrow$	Dontchev et Lempio, 1992, [DL92]
sous-diff	$g(t)$	ordre 1	Nochetto, Savaré et Verdi, 2000, [NSV00]

# Quelques résultats : synthèse

Sur l'inclusion  $\dot{u} + A(u) \ni f(., u)$  :

A	Résultats	Références
O.M.M.	$\exists !$	Bastien et Schatzman, 2002, [a05]
O.M.M.	convergence	
O.M.M.	ordre 1/2	
$\partial I_C$	ordre 1	
sous-diff	ordre 1	Bastien, 2013, [a16]

## Quelques résultats : existence et unicité

### Théorème ([a05])

Soient  $H$  un espace de Hilbert séparable,  $A$  un opérateur maximal monotone,  $u_0 \in D(A)$  et  $f : [0, T] \times H \rightarrow H$  tels que

$$\exists L, \quad \forall (t, x_1, x_2) \quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|, \quad (12)$$

et, pour tout  $R \geq 0$ ,

$$\Phi(R) = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, v) \right\|_{L^2(0, T; H)} : \|v\|_{L^2(0, T; H)} \leq R \right\} < +\infty.$$

Alors, il existe une unique fonction  $u \in W^{1, \infty}(0, T; H)$  de (9), avec  $u(0) = u_0$ .

[a05] : J. Bastien et M. Schatzman. "Numerical precision for differential inclusions with uniqueness". Dans : *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 36.3 (2002), pages 427–460. doi : 10.1051/m2an:2002020

# Quelques résultats : convergence du schéma

## Théorème ([a16])

Soient  $H$  un espace de Hilbert séparable,  $\phi$  une fonction convexe propre s.c.i.,  $u_0 \in D(\partial\phi)$  et  $f : [0, T] \times H \rightarrow H$  vérifiant (12) et, pour tout  $R \geq 0$ ,

$$\Phi(R) = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, v) \right\|_{L^\infty(0, T; H)} : \|v\|_{L^2(0, T; H)} \leq R \right\} < +\infty.$$

Soient  $u$  la solution unique de (9) avec  $A = \partial\phi$  et  $u_h$  définie par le schéma numérique (11). Il existe une constante  $M$  telle que pour tout  $h$ , on a

$$\forall t \in [0, T], \quad \|u_h(t) - u(t)\| \leq Mh.$$

[a16] : J. Bastien. “Convergence order of implicit Euler numerical scheme for maximal monotone differential inclusions”. Dans : *Z. Angew. Math. Phys.* 64 (2013), pages 955–966. doi : 10.1007/s00033-012-0276-y

## Changement de produit scalaire en dimension finie

## Lemme

Soient  $\mathcal{M}$  une matrice symétrique définie positive de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\phi$  une fonction convexe propre s.c.i. On munit  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire canonique et du produit scalaire  $\langle x, y \rangle_{\mathcal{M}}$  lié à la matrice  $\mathcal{M}$  et défini par

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{M}} = {}^t x \mathcal{M}^{-1} y. \quad (13)$$

On a

$$\partial_{\mathcal{M}} \phi = \mathcal{M} \partial \phi, \quad (14)$$

où  $\partial_{\mathcal{M}}$  est le sous-différentiel de  $\phi$  pour le produit scalaire défini par (13).

# Changement de produit scalaire en dimension finie

Une conséquence importante de ce lemme est que l'on pourra, en dimension finie, aussi utiliser l'inclusion différentielle

$$\dot{u}(t) + \mathcal{M}\partial\phi(u(t)) \ni f(t, u(t)),$$

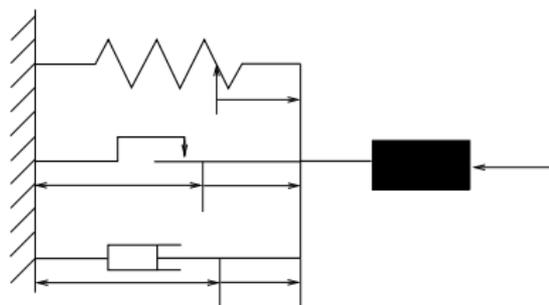
à la place de (9) avec  $A = \partial\phi$ .

# Plan

- 1 Théorie sur les inclusions différentielles modélisant le frottement
- 2 Association de modèles simples et présentation des modèles composés
- 3 Applications
- 4 Problèmes de frottement mal posés

# Deux modèles élémentaires

## Modèle parallèle



Association d'un ressort, d'un *dashpot* et d'un élément de Saint-Venant en parallèle :

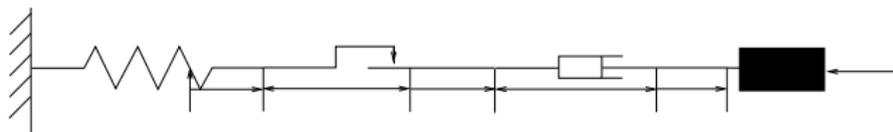
$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad (15a)$$

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + c\dot{x}(t) + \alpha\sigma(\dot{x}(t)) \ni F(t). \quad (15b)$$

Cette inclusion (classique) généralise (3).

# Deux modèles élémentaires

## Modèle série



Association d'un ressort, d'un *dashpot* et d'un élément de Saint-Venant en série : on inverse le graphe  $\sigma$  et on obtient l'inclusion :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (F - ku)/m, \\ \dot{u} + \beta(u/\eta) \ni y - ku/c. \end{cases} \quad (16)$$

# Assemblage et résultats en dimension finie

- Les deux modèles précédents, ainsi qu'un certain nombre d'associations finies de ressorts, d'éléments de Saint-Venant et de points matériels sont tous gouvernés (en utilisant dans certains cas, le changement du produit scalaire du lemme 4) par une inclusion du type (9) avec  $A = \partial\phi$ .
- On a donc existence et unicité de la solution,
- ainsi que la convergence d'ordre un du schéma numérique (10) ou (11).

J. Bastien, M. Schatzman et C.-H. Lamarque. "Study of some rheological models with a finite number of degrees of freedom". Dans : *Eur. J. Mech. A Solids* 19.2 (2000), pages 277–307. doi : 10.1016/S0997-7538(00)00163-7

# Assemblage et résultats en dimension finie

- Les deux modèles précédents, ainsi qu'un certain nombre d'associations finies de ressorts, d'éléments de Saint-Venant et de points matériels sont tous gouvernés (en utilisant dans certains cas, le changement du produit scalaire du lemme 4) par une inclusion du type (9) avec  $A = \partial\phi$ .
- On a donc existence et unicité de la solution,
- ainsi que la convergence d'ordre un du schéma numérique (10) ou (11).

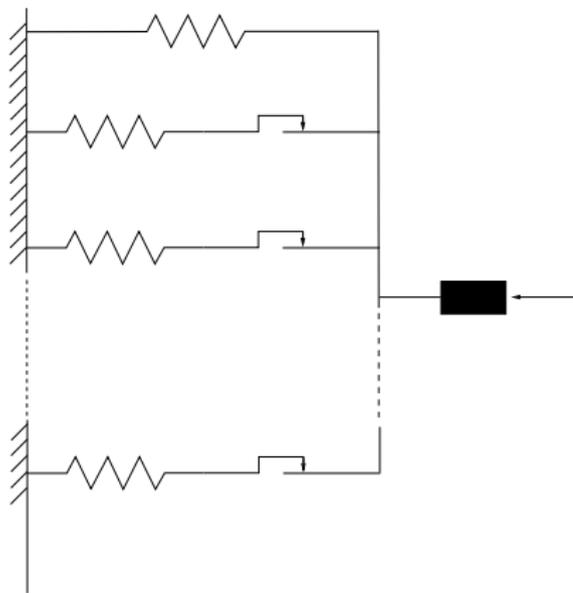
J. Bastien, M. Schatzman et C.-H. Lamarque. "Study of some rheological models with a finite number of degrees of freedom". Dans : *Eur. J. Mech. A Solids* 19.2 (2000), pages 277–307. doi : 10.1016/S0997-7538(00)00163-7

# Assemblage et résultats en dimension finie

- Les deux modèles précédents, ainsi qu'un certain nombre d'associations finies de ressorts, d'éléments de Saint-Venant et de points matériels sont tous gouvernés (en utilisant dans certains cas, le changement du produit scalaire du lemme 4) par une inclusion du type (9) avec  $A = \partial\phi$ .
- On a donc existence et unicité de la solution,
- ainsi que la convergence d'ordre un du schéma numérique (10) ou (11).

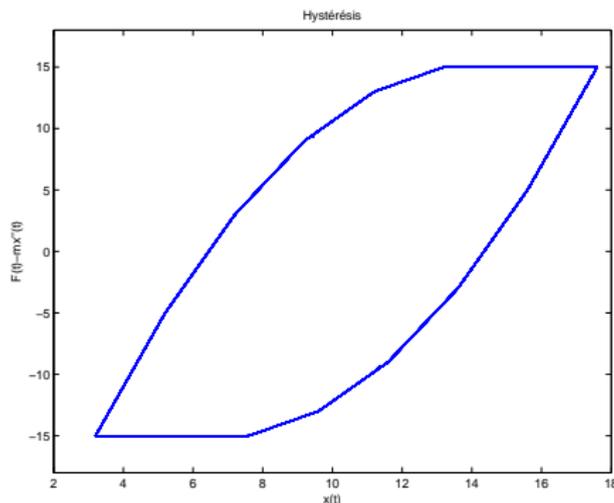
J. Bastien, M. Schatzman et C.-H. Lamarque. "Study of some rheological models with a finite number of degrees of freedom". Dans : *Eur. J. Mech. A Solids* 19.2 (2000), pages 277–307. doi : 10.1016/S0997-7538(00)00163-7

# Assemblage et résultats en dimension finie : exemple



Modèle de Prandtl généralisé

## Assemblage et résultats en dimension finie : exemple



Des simulations numériques montrent des cycles d'hystérésis polygonaux et convexes.

# Autres modèles

- Autres modèles en dimension finie {Bastien, Schatzman et Lamarque, 2000, [a02]} ;
- Modèle continu {Bastien, Schatzman et Lamarque, 2002, [a04]} ;
- Géphyroïde {Bastien et Lamarque, 2008, [a13]} ;
- Chaîne élastoplastique {Bastien et Lamarque, 2009, [a14]}.

► Compléments



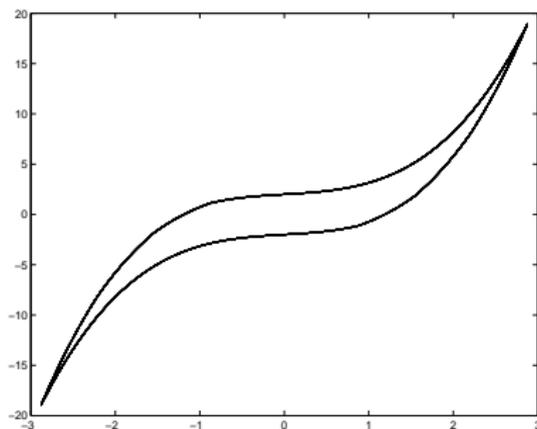
# Modèles Lipschitziens

On obtient encore existence, unicité et convergence du schéma pour l'inclusion :

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + k_0x + cx^3 + a\dot{x} + \sum_{i=1}^n k_i u_i = F, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \dot{u}_i + \beta(u_i/\eta_i) \ni \dot{x}, \end{array} \right.$$

ou d'autres avec une non linéarité plus générale.

# Modèles Lipschitziens

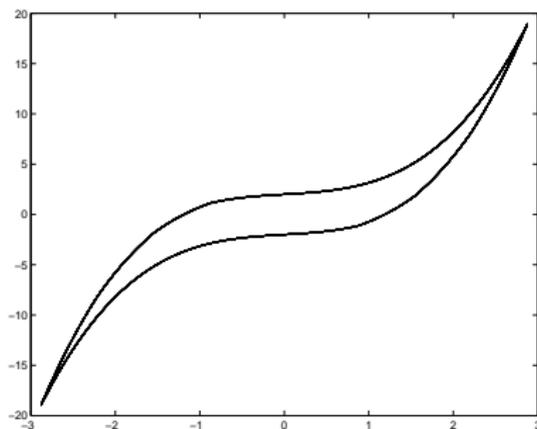


Les cycles d'hystérésis sont alors non convexes.

{Thèse : Bernardin, 2004, [Ber04]}

C.-H. Lamarque, F. Bernardin et J. Bastien. "Study of a rheological model with a friction term and a cubic term : deterministic and stochastic cases". Dans : *Eur. J. Mech. A Solids* 24.4 (2005), pages 572–592. doi : 10.1016/j.euromechsol.2005.05.001

# Modèles Lipschitziens



Les cycles d'hystérésis sont alors non convexes.

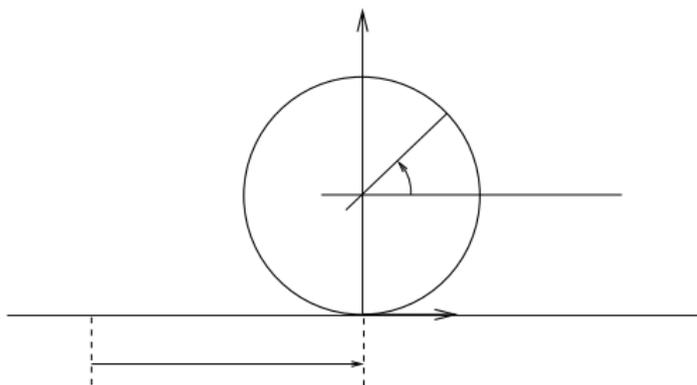
{Thèse : Bernardin, 2004, [Ber04]}

C.-H. Lamarque, F. Bernardin et J. Bastien. "Study of a rheological model with a friction term and a cubic term : deterministic and stochastic cases". Dans : *Eur. J. Mech. A Solids* 24.4 (2005), pages 572–592. doi : 10.1016/j.euromechsol.2005.05.001

# Plan

- 1 Théorie sur les inclusions différentielles modélisant le frottement
- 2 Association de modèles simples et présentation des modèles composés
- 3 Applications**
- 4 Problèmes de frottement mal posés

# La boule de billard



On étudie une boule roulant sur un tapis avec un frottement de Coulomb à l'interface sol/roue. Le mouvement de la boule est décrit par deux paramètres  $x$  et  $\theta$ . Si le chargement vertical est constant, la loi de Coulomb s'écrit

$$\mathcal{T} \in -\alpha\sigma (\dot{x} + R\dot{\theta}).$$

# La boule de billard

Notons  $g = -\mathcal{T}$ ,  $x_1 = \dot{x}$  et  $x_2 = R\dot{\theta}$ . Le théorème du moment cinétique et la relation fondamentale de la dynamique sont ici équivalents à

$$\begin{cases} m\dot{x}_1 + g = 0, \\ \frac{I}{R^2}\dot{x}_2 + g = 0, \\ g \in \alpha\sigma(x_1 + x_2), \end{cases}$$

inclusion encore équivalente à (9) avec  $A = \partial\phi$  et  $\phi$  donnée par

$$\phi(X) = \phi(x_1, x_2) = \alpha|x_1 + x_2|.$$

# Une application industrielle : étude d'un tendeur de courroie

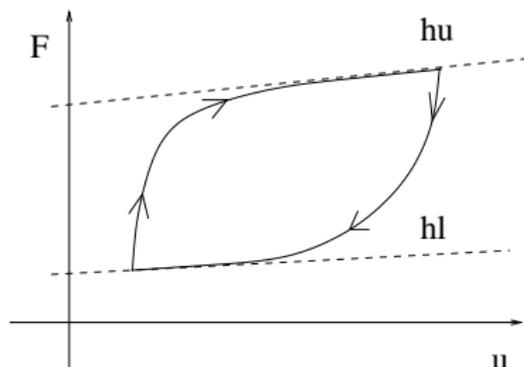
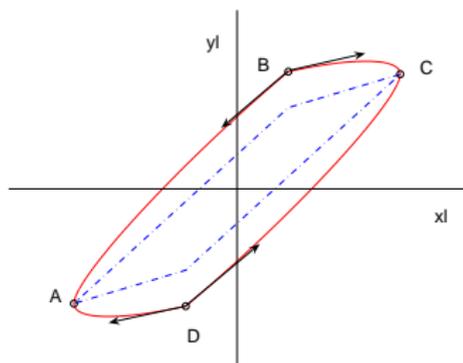


Lors d'une collaboration avec Régis Dufour et Guilhem Michon (INSA de Lyon), un tendeur de courroie de distribution a été modélisé.

{Thèse : Michon, 2006, [Mic06]}

J. Bastien et al. "An analysis of the modified Dahl and Masing models : application to a belt tensioner". Dans : *J. Sound Vibration* 302.4-5 (2007), pages 841–864. doi : 10.1016/j.jsv.2006.12.013

# Une application industrielle : étude d'un tendeur de courroie

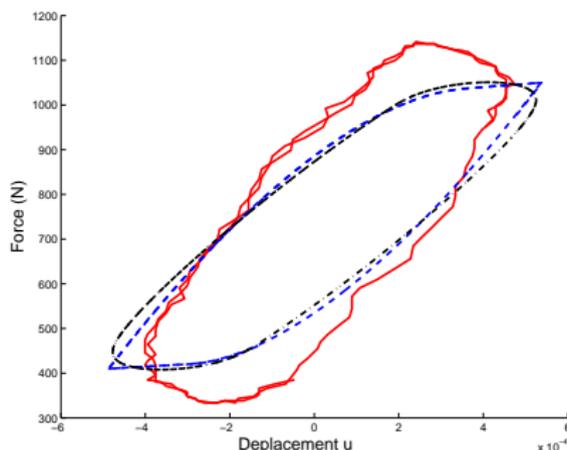


On utilise deux modèles fournissant un cycle d'hystérésis (dans le plan  $(u, \mathcal{F})$ ) : le modèle viscoélastique de Masing (MM) et celui de Dahl modifié (MD) [AMD02 ; AMD04 ; MMD05 ; Vis94 ; Bli90 ; Bli92].

► Compléments

# Une application industrielle : étude d'un tendeur de courroie

On identifie tout d'abord les paramètres des deux modèles, en régime permanent.



Une fois cette identification faite, nous mettons le tendeur en situation réelle. La figure montre une bonne adéquation entre les données mesurées et les éléments calculés.

# Problèmes avec retard et mémoire

Voir le Master 2 {Holland, 2001, [Hol01]} et les publications attenantes [a06 ; a07 ; a08 ; a10]

## D'autres forces de frottement (coefficient dynamique variable)

On cherche à généraliser la loi de frottement de Coulomb unidimensionnelle (2) de façon à prendre en compte des lois plus générales comme représentées plus loin.

On cherche à étudier une loi de frottement du type

$$g(t) \in -A(\dot{x}(t)), \quad (17a)$$

où l'opérateur multivoque est de la forme

$$A = \alpha_S \sigma + \Psi, \quad (17b)$$

où  $\alpha_S$  est le coefficient de frottement statique, l'opérateur multivoque  $\sigma$  est défini par (1) et  $\Psi$  est une fonction régulière et vérifiant  $\Psi(0) = 0$ .

## D'autres forces de frottement (coefficient dynamique variable)

On cherche à généraliser la loi de frottement de Coulomb unidimensionnelle (2) de façon à prendre en compte des lois plus générales comme représentées plus loin.

On cherche à étudier une loi de frottement du type

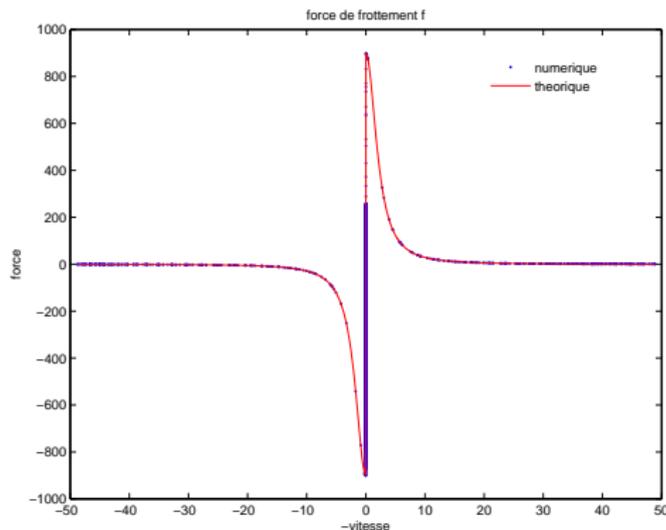
$$g(t) \in -A(\dot{x}(t)), \quad (17a)$$

où l'opérateur multivoque est de la forme

$$A = \alpha_S \sigma + \Psi, \quad (17b)$$

où  $\alpha_S$  est le coefficient de frottement statique, l'opérateur multivoque  $\sigma$  est défini par (1) et  $\Psi$  est une fonction régulière et vérifiant  $\Psi(0) = 0$ .

# D'autres forces de frottement (coefficient dynamique variable)



Le problème de Stribeck entre dans ce cadre et des simulations numériques ont été faites.

## D'autres forces de frottement (coefficient dynamique variable)

Nous avons montré dans [a12] qu'une fonction  $\Psi$  trop fortement décroissante pouvait induire une grande sensibilité du modèle par rapport aux données et mettait donc son comportement prédictif en jeu. Cela peut aussi expliquer sans doute l'aspect vain de notre recherche. Nous reviendrons là-dessus plus tard.

Les associations de modèles élémentaires déjà vue peuvent être envisagées pour former un grand nombre de modèles, décrits soit par des inclusions différentielles maximales monotones avec un second membre lipschitzien soit par des équations différentielles ordinaires.

## D'autres forces de frottement (coefficient dynamique variable)

Nous avons montré dans [a12] qu'une fonction  $\Psi$  trop fortement décroissante pouvait induire une grande sensibilité du modèle par rapport aux données et mettait donc son comportement prédictif en jeu. Cela peut aussi expliquer sans doute l'aspect vain de notre recherche. Nous reviendrons là-dessus plus tard.

Les associations de modèles élémentaires déjà vue peuvent être envisagées pour former un grand nombre de modèles, décrits soit par des inclusions différentielles maximales monotones avec un second membre lipschitzien soit par des équations différentielles ordinaires.

## D'autres forces de frottement (coefficient statique variable)

Voir [d1, annexe A] et [a01]. Nous n'avons pas insisté sur ce modèle, pour lequel on a montré l'absence d'unicité de la solution [a01].

## D'autres forces de frottement (coefficient statique et dynamique variables)

Voir [d1, annexe B]. Là aussi, malgré son aspect très général, cette loi n'a pas été développée. En effet, l'unicité et la convergence du schéma d'Euler n'ont pas été démontrées.

# Plan

- 1 Théorie sur les inclusions différentielles modélisant le frottement
- 2 Association de modèles simples et présentation des modèles composés
- 3 Applications
- 4 Problèmes de frottement mal posés

# Trois types de lois de friction

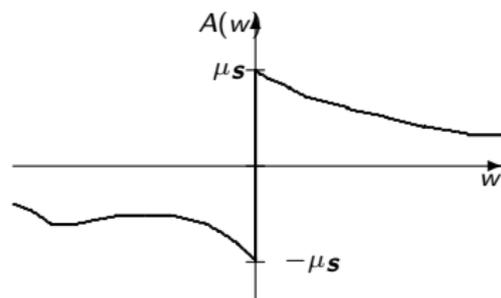
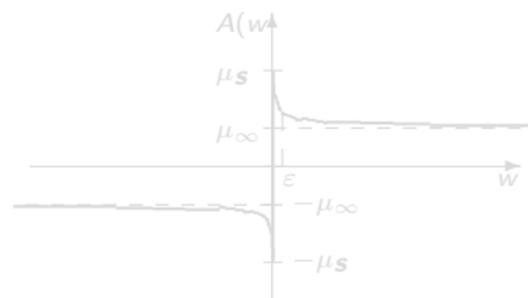
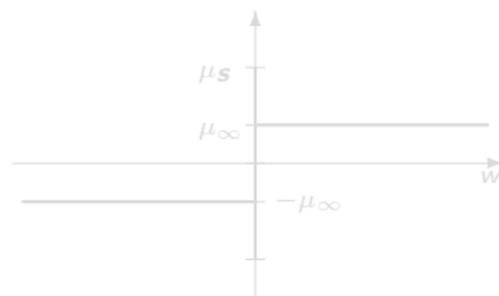
On étudie un modèle à un ddl :

$$\ddot{x}(t) - g(t) + C\dot{x}(t) = f(t)$$

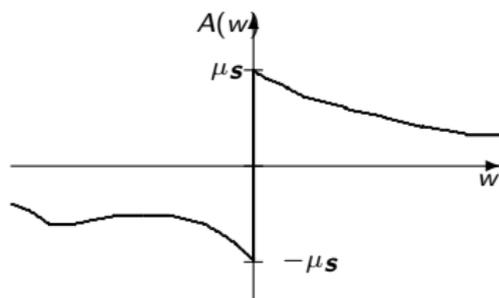
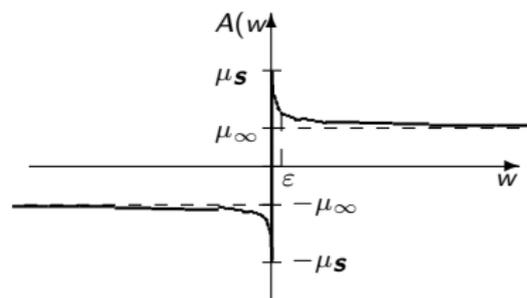
où  $g(t) \in -A(\dot{x}(t))$ .

J. Bastien et M. Schatzman. "Indeterminacy of a dry friction problem with viscous damping involving stiction". Dans : *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 88.4 (2008), pages 243–255. doi : 10.1002/zamm.200700022

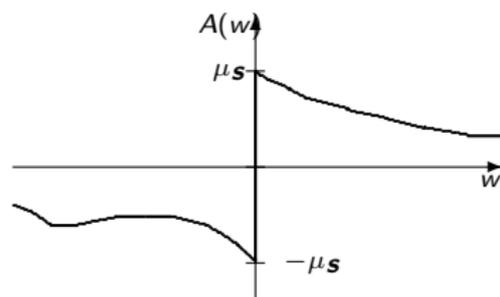
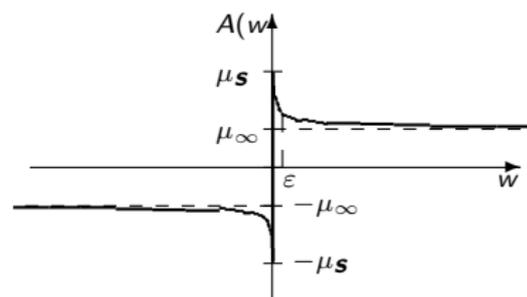
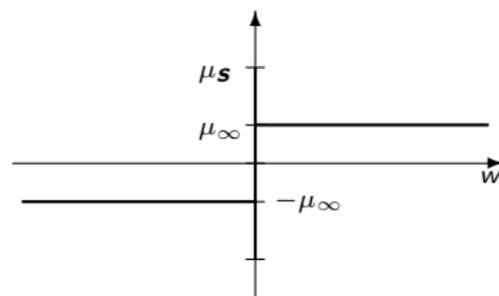
## Trois types de lois de friction

Forme générale de  $A$ Le graphe  $\sigma_\epsilon$ Le graphe  $\sigma_0$

## Trois types de lois de friction

Forme générale de  $A$ Le graphe  $\sigma_\epsilon$ Le graphe  $\sigma_0$ 

## Trois types de lois de friction

Forme générale de  $A$ Le graphe  $\sigma_\epsilon$ Le graphe  $\sigma_0$

## Premier modèle : limite d'une loi de friction déterministe

On étudie l'inclusion différentielle sous la forme

$$\begin{aligned}\dot{v}_\varepsilon + \sigma_\varepsilon(v_\varepsilon) + Cv_\varepsilon &\ni f_0, \\ v_\varepsilon(0) &= v_\varepsilon^0,\end{aligned}$$

où  $f_0$  est constante et appartient à  $]\mu_\infty, \mu_S[$ .

On suppose que

$$\sigma_\varepsilon(w) = \mu_S \sigma(w) - (\mu_S - \mu_\infty) \Phi\left(\frac{w}{\varepsilon}\right),$$

où  $\Phi$  est impaire, lipschitzienne, strictement croissante avec  $\Phi(+\infty) = 1$ .

## Premier modèle : limite d'une loi de friction déterministe

On étudie l'inclusion différentielle sous la forme

$$\begin{aligned}\dot{v}_\varepsilon + \sigma_\varepsilon(v_\varepsilon) + Cv_\varepsilon &\ni f_0, \\ v_\varepsilon(0) &= v_\varepsilon^0,\end{aligned}$$

où  $f_0$  est constante et appartient à  $]\mu_\infty, \mu_S[$ .

On suppose que

$$\sigma_\varepsilon(w) = \mu_S \sigma(w) - (\mu_S - \mu_\infty) \Phi\left(\frac{w}{\varepsilon}\right),$$

où  $\Phi$  est impaire, lipschitzienne, strictement croissante avec  $\Phi(+\infty) = 1$ .

## Premier modèle : limite d'une loi de friction déterministe

## Théorème

Il existe  $r_0$  tel que

① Si  $v_\varepsilon^0 \geq \varepsilon r_0$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (v_\varepsilon - v_\varepsilon^0 e^{-Ct}) = \begin{cases} (f_0 - \mu_\infty)(1 - e^{-Ct})/C & \text{si } C > 0, \\ (f_0 - \mu_\infty)t & \text{si } C = 0. \end{cases}$$

- La convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}^+$  si  $C > 0$  ;
- si  $C = 0$ , elle est uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R}^+$  ;
- si  $C = 0$  et  $1 - \Phi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , la convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}^+$ .

② Au contraire, si  $0 \leq v_\varepsilon^0 \leq \varepsilon r_0$ , alors,  $v_\varepsilon - v_\varepsilon^0 e^{-Ct}$  tend vers zéro uniformément sur  $\mathbb{R}^+$

## Premier modèle : limite d'une loi de friction déterministe

## Théorème

Il existe  $r_0$  tel que

① Si  $v_\varepsilon^0 \geq \varepsilon r_0$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (v_\varepsilon - v_\varepsilon^0 e^{-Ct}) = \begin{cases} (f_0 - \mu_\infty)(1 - e^{-Ct})/C & \text{si } C > 0, \\ (f_0 - \mu_\infty)t & \text{si } C = 0. \end{cases}$$

- La convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}^+$  si  $C > 0$  ;
- si  $C = 0$ , elle est uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R}^+$  ;
- si  $C = 0$  et  $1 - \Phi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , la convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}^+$ .

② Au contraire, si  $0 \leq v_\varepsilon^0 \leq \varepsilon r_0$ , alors,  $v_\varepsilon - v_\varepsilon^0 e^{-Ct}$  tend vers zéro uniformément sur  $\mathbb{R}^+$

## Premier modèle : limite d'une loi de friction déterministe

## Théorème

Il existe  $r_0$  tel que

① Si  $v_\varepsilon^0 \geq \varepsilon r_0$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (v_\varepsilon - v_\varepsilon^0 e^{-Ct}) = \begin{cases} (f_0 - \mu_\infty)(1 - e^{-Ct})/C & \text{si } C > 0, \\ (f_0 - \mu_\infty)t & \text{si } C = 0. \end{cases}$$

- La convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}^+$  si  $C > 0$  ;
- si  $C = 0$ , elle est uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R}^+$  ;
- si  $C = 0$  et  $1 - \Phi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , la convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}^+$ .

② Au contraire, si  $0 \leq v_\varepsilon^0 \leq \varepsilon r_0$ , alors,  $v_\varepsilon - v_\varepsilon^0 e^{-Ct}$  tend vers zéro uniformément sur  $\mathbb{R}^+$

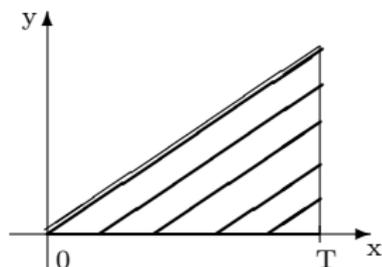
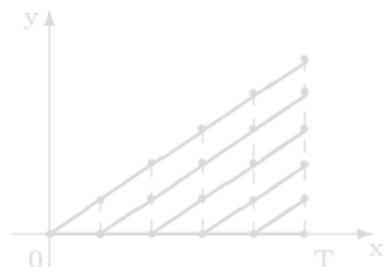
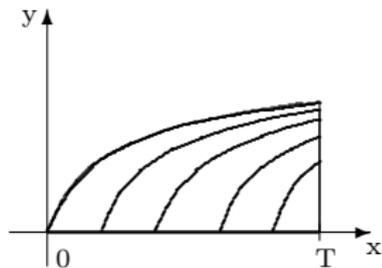
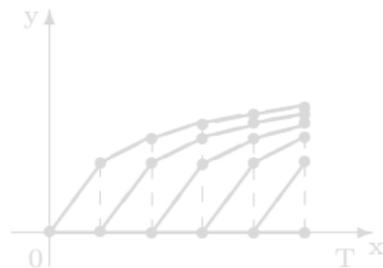
## Second modèle : une inclusion différentielle sans unicité

On étudie maintenant l'inclusion différentielle limite :

$$\begin{aligned}\dot{v} + \sigma_0(v) + Cv &\ni f_0, \\ v(0) &= v_0.\end{aligned}$$

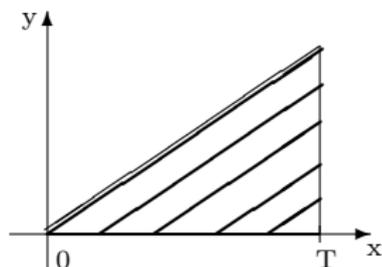
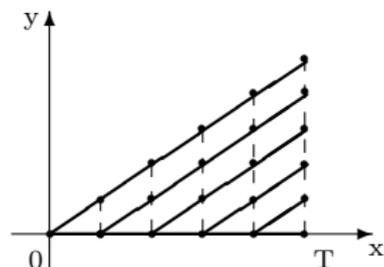
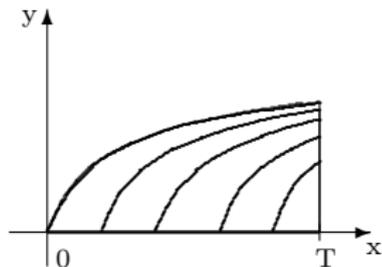
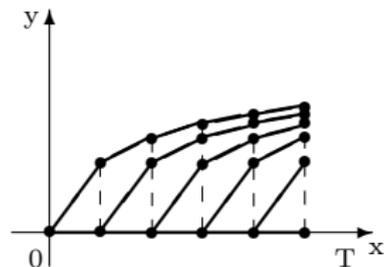
# Construction explicite des liasses continues et discrètes

On peut construire de façon explicite les liasses de solutions continues et discrètes en utilisant le graphe  $(I + h\sigma_0 + hC)^{-1}$  qui n'est plus univoque.

continue  $C = 0$ discrète  $C = 0$ continue  $C > 0$ discrète  $C > 0$

# Construction explicite des liasses continues et discrètes

On peut construire de façon explicite les liasses de solutions continues et discrètes en utilisant le graphe  $(I + h\sigma_0 + hC)^{-1}$  qui n'est plus univoque.

continue  $C = 0$ discrète  $C = 0$ continue  $C > 0$ discrète  $C > 0$

# Conclusion

- Vaste de classe de modèles rhéologiques avec des force de frottement de type Coulomb ou plus générales et :
  - un cadre théorique (existence, unicité) ;
  - un schéma numérique d'ordre 1, optimal.
- À faire :
  - Confronter ces lois plus générales à des expériences simples, afin de valider les calculs numériques ;
  - Étudier des lois de contact avec chargement normal variable ou unilatérales.
- D'autres pistes, suggérées par les rapporteurs :
  - Sur la dynamique des systèmes non-réguliers : étude des solutions périodiques, leur multiplicité éventuelle et leur stabilité, ....
  - Modèles non monotones, les systèmes lagrangiens.

# Conclusion

- Vaste de classe de modèles rhéologiques avec des force de frottement de type Coulomb ou plus générales et :
  - un cadre théorique (existence, unicité) ;
  - un schéma numérique d'ordre 1, optimal.
- À faire :
  - Confronter ces lois plus générales à des expériences simples, afin de valider les calculs numériques ;
  - Étudier des lois de contact avec chargement normal variable ou unilatérales.
- D'autres pistes, suggérées par les rapporteurs :
  - Sur la dynamique des systèmes non-réguliers : étude des solutions périodiques, leur multiplicité éventuelle et leur stabilité, ....
  - Modèles non monotones, les systèmes lagrangiens.

# Conclusion

- Vaste de classe de modèles rhéologiques avec des force de frottement de type Coulomb ou plus générales et :
  - un cadre théorique (existence, unicité) ;
  - un schéma numérique d'ordre 1, optimal.
- À faire :
  - Confronter ces lois plus générales à des expériences simples, afin de valider les calculs numériques ;
  - Étudier des lois de contact avec chargement normal variable ou unilatérales.
- D'autres pistes, suggérées par les rapporteurs :
  - Sur la dynamique des systèmes non-réguliers : étude des solutions périodiques, leur multiplicité éventuelle et leur stabilité, ....
  - Modèles non monotones, les systèmes lagrangiens.

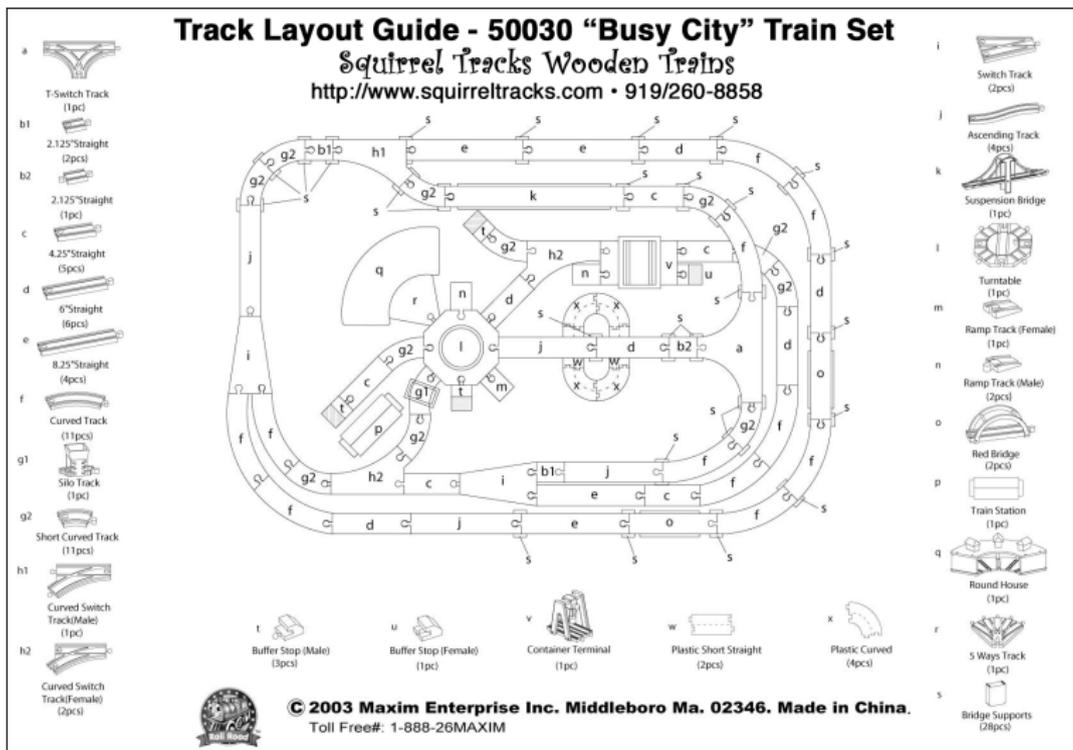
## Deuxième partie II

### Interlude

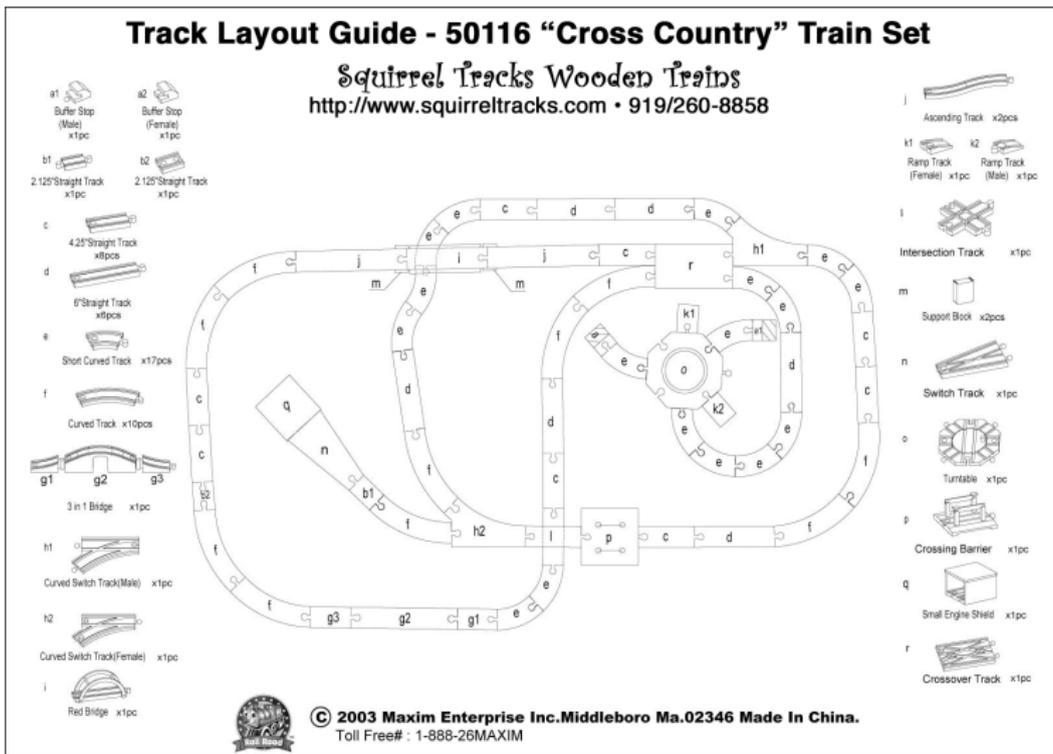
# Difficulté de construire un circuit de train miniature

- Nécessité du plan
- Nombreuses pièces
- Circuit prédéfini
- Au hasard, pas d'emboîtement de courbe fermée

# Un exemple de plan de train existant (A)



# Un exemple de plan de train existant (B)



- Plan libre
- Nombre de pièces restreint
- Toute courbe fermée s'emboîte parfaitement

J. Bastien. "Circuits universels de trains ou de voitures". Brevet FR12 54413.

Demande de brevet déposée. Voir

<http://www.universite-lyon.fr/valorisation/circuits-universels-d-e-trains-ou-de-voitures--183187.kjsp?RH=PRINC> Demande de PCT déposée le 13 mai 2013 (PCT/EP2013/059836). 15 mai 2012

- Cinq pièces de base sont utilisées pour construire un circuit fermé.
- Incluses dans un carré, elles sont définies à partir d'un pavage simple du plan permettant la construction de courbes dérivables fermées.
- Les lignes partent du sommet ou du milieu de l'arête de façon tangente.
- Les lignes moyennes sont définies à partir de 2 segments de droites, 2 arcs de cercle et une courbe de bézier de degré 2.
- De cette façon, toute boucle fermée se raccorde parfaitement.



## Troisième partie III

# Identification en biomécanique

# Plan

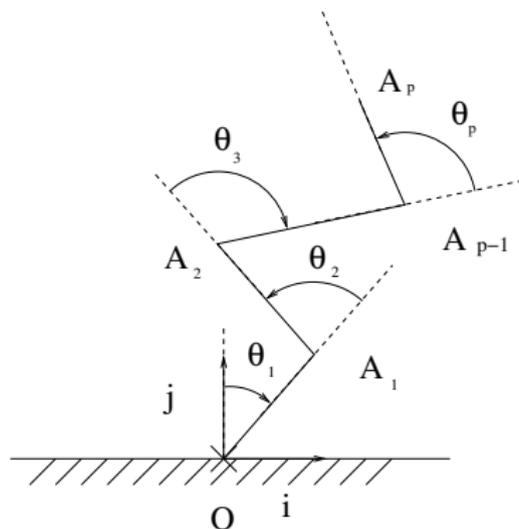
- 5 Espaces de travail (plans)
- 6 Sigmoïdes et déplacements articulaires
- 7 Identification et dynamique inverse

# Plan

- 5 Espaces de travail (plans)
- 6 Sigmoïdes et déplacements articulaires
- 7 Identification et dynamique inverse

# Le système plan considéré

J. Bastien, P. Legreneur et K. Monteil. "A geometrical alternative to jacobian rank deficiency method for planar workspace characterisation". Dans : *Mechanism and Machine Theory* 45 (2010), pages 335–348. doi : 10.1016/j.mechmachtheory.2009.09.007



# Définition de l'espace de travail

On suppose que

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad -\pi < \theta_i^- < \theta_i^+ \leq \pi. \quad (18)$$

On cherche l'ensemble des points  $A_p$  tels que

$$A_0 = 0, \quad (19a)$$

$$\widehat{(\vec{j}, \vec{0A_1})} = \theta_1, \quad (19b)$$

$$\forall i \in \{2, \dots, p\}, \quad \widehat{(\vec{A_{i-2}A_{i-1}}, \vec{A_{i-1}A_i})} = \theta_i, \quad (19c)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad A_{i-1}A_i = l_i, \quad (19d)$$

avec les contraintes

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \theta_i \in [\theta_i^-, \theta_i^+]. \quad (19e)$$

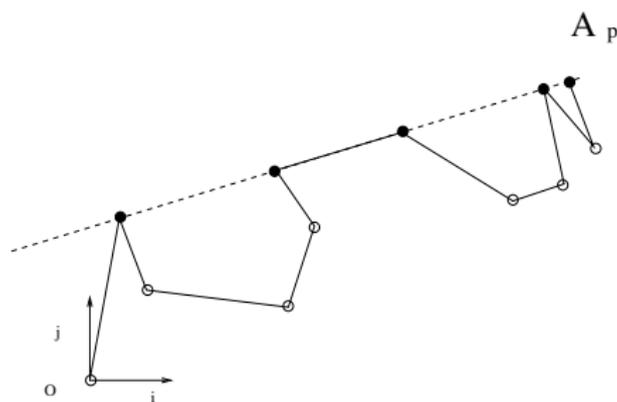
# Le résultats essentiel

## Lemme

*Si à  $y = \Phi_p(\theta_1, \dots, \theta_p)$  correspond au moins deux angles « libres » et si  $y$  appartient à la frontière de l'espace de travail, alors les  $q + 1$  points  $A_{i_1-1}, A_{i_2-1}, \dots, A_{i_q-1}$  (correspondant aux angles libres) et  $A_p$  sont alignés.*

# Conséquence de ce résultat

Points  $A_i$  où les contraintes sont inactives ( $\bullet$ ) et Points  $A_i$  où les contraintes sont actives ( $\circ$ ).

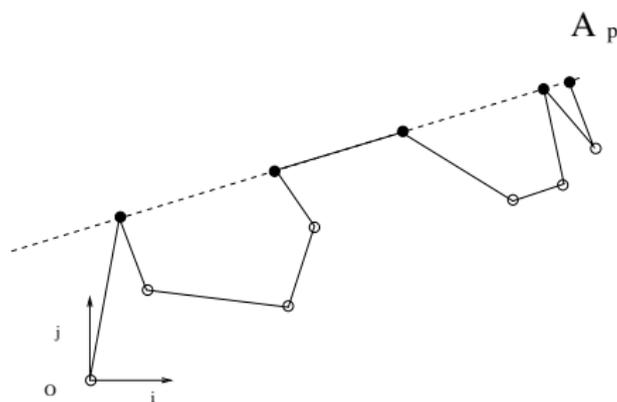


Si  $y = \Phi_p(\theta_1, \dots, \theta_p)$  a au moins deux deux angles « libres » et si  $y$  appartient à la frontière de l'espace de travail, alors

- chacune des angles saturés  $\theta_{j_k}$  est connu ;
- chacun des angles libres  $\theta_{i_k}$  est connu en fonction des angles saturés ;
- seul un angle libre décrit un intervalle.

# Conséquence de ce résultat

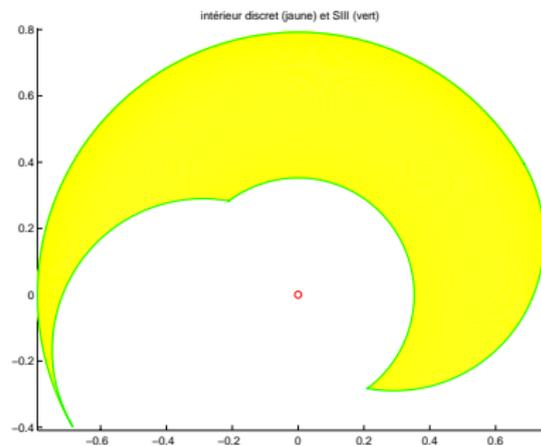
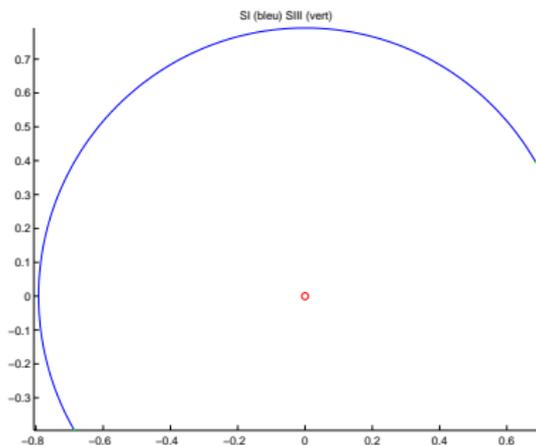
Points  $A_i$  où les contraintes sont inactives ( $\bullet$ ) et Points  $A_i$  où les contraintes sont actives ( $\circ$ ).



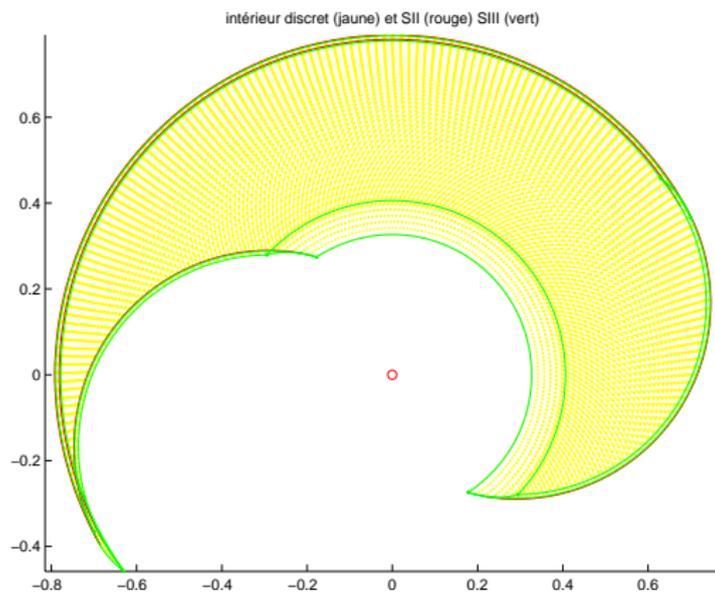
Si  $y = \Phi_p(\theta_1, \dots, \theta_p)$  a au moins deux deux angles « libres » et si  $y$  appartient à la frontière de l'espace de travail, alors

- chacune des angles saturés  $\theta_{j_k}$  est connu ;
- chacun des angles libres  $\theta_{i_k}$  est connu en fonction des angles saturés ;
- seul un angle libre décrit un intervalle.

# Simulations avec 1 ou 2 ddl



# Simulations avec 3 ddl



# Plan

- 5 Espaces de travail (plans)
- 6 Sigmoïdes et déplacements articulaires
- 7 Identification et dynamique inverse

# Hypothèses et objectifs

- Système polyarticulé (voir figure espaces plans);
- Segments rigides;
- Le premier point est immobile.

⇒ Les coordonnées des points sont totalement déterminées par les angles articulaires.

- On veut remplacer les trajectoires expérimentales par des courbes analytiques.
- Ces fonctions sont plus régulières et peuvent être dérivées et utilisées pour des calculs.

Voir [s2; c10; c12; c13; x1], le M2 {Villars, 2008, [Vil08]} et la thèse de {Creveaux, 2009, [Cre09]}.

# Hypothèses et objectifs

- Système polyarticulé (voir figure espaces plans) ;
- Segments rigides ;
- Le premier point est immobile.

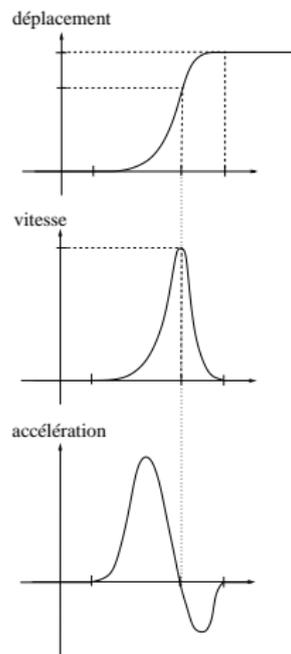
⇒ Les coordonnées des points sont totalement déterminées par les angles articulaires.

- On veut remplacer les trajectoires expérimentales par des courbes analytiques.
- Ces fonctions sont plus régulières et peuvent être dérivées et utilisées pour des calculs.

Voir [s2 ; c10 ; c12 ; c13 ; x1], le M2 {Villars, 2008, [Vil08]} et la thèse de {Creveaux, 2009, [Cre09]}.

# Principe

- Chaque angle articulaire est décrit par une forme « sigmoïdale ».
- Le début et la fin du mouvement sont à vitesse nulle.
- La vitesse est maximale à  $t_0 \in ]t_b, t_e[$ .



# Problème

On cherche  $g$  de classe  $C^2$  définie sur  $[0, 1]$  vérifiant

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = 0, \quad (20a)$$

$$g(1) = 1, \quad g'(1) = 0, \quad g''(1) = 0, \quad (20b)$$

$$g(\alpha) = \beta, \quad g'(\alpha) = k, \quad g''(\alpha) = 0, \quad (20c)$$

$$\forall u \in ]0, \alpha[, \quad g''(t) > 0, \quad (20d)$$

$$\forall u \in ]\alpha, 1[, \quad g''(t) < 0. \quad (20e)$$

► Compléments

# Trajectoires expérimentales et reconstruites

## Animations finales

- 1 Tâches de pointages :
  - Cliquer pour expérimental
  - Films avec les trois modèles sigmoïdes
    - Cliquer pour SYM
    - Cliquer pour NORM
    - Cliquer pour INVEXP
  - Cliquer pour tout
- 2 Squat jump : Cliquer ici

# Plan

- 5 Espaces de travail (plans)
- 6 Sigmoïdes et déplacements articulaires
- 7 Identification et dynamique inverse**

# Hypothèses et objectifs

- Système polyarticulé (voir figure espaces plans);
- Segments rigides;
- Un mouvement simple est étudié (squat jump).

Nous supposons les longueurs des segments connues et nous essayons de déterminer tout ou partie des paramètres inertiels et (IP) anthropométriques (AP) en utilisant les déplacements et les actions exercées par le sujet sur le sol (force et couple).

Les forces et les couples résiduels ont été minimisés afin de déterminer les paramètres IP et AP. Au lieu de minimiser, de façon classique, la force et le couple résiduels, on a minimisé l'intégrale double de ceux-ci, ce qui a donné de meilleurs résultats.

Voir [x2 ; s1 ; c14].

# Hypothèses et objectifs

- Système polyarticulé (voir figure espaces plans) ;
- Segments rigides ;
- Un mouvement simple est étudié (squat jump).

Nous supposons les longueurs des segments connues et nous essayons de déterminer tout ou partie des paramètres inertiels et (IP) anthropométriques (AP) en utilisant les déplacements et les actions exercées par le sujet sur le sol (force et couple).

Les forces et les couples résiduels ont été minimisés afin de déterminer les paramètres IP et AP. Au lieu de minimiser, de façon classique, la force et le couple résiduels, on a minimisé l'intégrale double de ceux-ci, ce qui a donné de meilleurs résultats.

Voir [x2 ; s1 ; c14].

# Hypothèses et objectifs

- Système polyarticulé (voir figure espaces plans);
- Segments rigides;
- Un mouvement simple est étudié (squat jump).

Nous supposons les longueurs des segments connues et nous essayons de déterminer tout ou partie des paramètres inertiels et (IP) anthropométriques (AP) en utilisant les déplacements et les actions exercées par le sujet sur le sol (force et couple).

Les forces et les couples résiduels ont été minimisés afin de déterminer les paramètres IP et AP. Au lieu de minimiser, de façon classique, la force et le couple résiduels, on a minimisé l'intégrale double de ceux-ci, ce qui a donné de meilleurs résultats.

Voir [x2; s1; c14].

# Hypothèses et objectifs

- Système polyarticulé (voir figure espaces plans);
- Segments rigides;
- Un mouvement simple est étudié (squat jump).

Nous supposons les longueurs des segments connues et nous essayons de déterminer tout ou partie des paramètres inertiels et (IP) anthropométriques (AP) en utilisant les déplacements et les actions exercées par le sujet sur le sol (force et couple).

Les forces et les couples résiduels ont été minimisés afin de déterminer les paramètres IP et AP. Au lieu de minimiser, de façon classique, la force et le couple résiduels, on a minimisé l'intégrale double de ceux-ci, ce qui a donné de meilleurs résultats.

Voir [x2 ; s1 ; c14].

# Conclusion

- Pour la détermination des espaces de travail :
  - Tenter d'établir une condition suffisante ;
  - Piste suggérée : associer des liaisons élastiques au caractère éventuellement unilatéral, pour associer des cartes énergétiques à l'espace de travail.
- Passer de la dimension 2 à 3 pour les trois thématiques étudiées ?
- Pour l'étude des sigmoides, des validations restent à fournir sur le choix des sigmoides pour d'autres types de mouvements.
- De façon plus générale, lier les deux thématiques ?

# Conclusion

- Pour la détermination des espaces de travail :
  - Tenter d'établir une condition suffisante ;
  - Piste suggérée : associer des liaisons élastiques au caractère éventuellement unilatéral, pour associer des cartes énergétiques à l'espace de travail.
- Passer de la dimension 2 à 3 pour les trois thématiques étudiées ?
- Pour l'étude des sigmoïdes, des validations restent à fournir sur le choix des sigmoïdes pour d'autres types de mouvements.
- De façon plus générale, lier les deux thématiques ?

# Conclusion

- Pour la détermination des espaces de travail :
  - Tenter d'établir une condition suffisante ;
  - Piste suggérée : associer des liaisons élastiques au caractère éventuellement unilatéral, pour associer des cartes énergétiques à l'espace de travail.
- Passer de la dimension 2 à 3 pour les trois thématiques étudiées ?
- Pour l'étude des sigmoïdes, des validations restent à fournir sur le choix des sigmoïdes pour d'autres types de mouvements.
- De façon plus générale, lier les deux thématiques ?

# Conclusion

- Pour la détermination des espaces de travail :
  - Tenter d'établir une condition suffisante ;
  - Piste suggérée : associer des liaisons élastiques au caractère éventuellement unilatéral, pour associer des cartes énergétiques à l'espace de travail.
- Passer de la dimension 2 à 3 pour les trois thématiques étudiées ?
- Pour l'étude des sigmoïdes, des validations restent à fournir sur le choix des sigmoïdes pour d'autres types de mouvements.
- De façon plus générale, lier les deux thématiques ?

- Les références bibliographiques de l'auteur sont données avec les clés suivantes :

[a]	Articles publiés dans des revues internationales à comités de lecture ;
[cras]	Comptes rendus à l'Académie des Sciences ;
[x]	Preprints déposés sur <a href="http://arxiv.org">http://arxiv.org</a> ;
[s]	Articles soumis ;
[o]	Ouvrages ;
[cdo]	Chapitres d'ouvrages ;
[bre]	Brevet ;
[c]	Congrès internationaux ;
[cf]	Congrès et workshop français ;
[d]	Divers.

et sont toutes regroupées selon ces catégories à la rubrique « A Références de l'auteur ». Elles ont sont disponibles, via science direct, sur [http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/liste\\_publicis.html](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/liste_publicis.html)

- Les autres références sont regroupées, quant à elles, à la rubrique « B Autres références », au format avec tri usuel des clés (ordre alphabétique des noms d'auteurs, suivis de l'année).

## A Références de l'auteur

- ① Articles publiés dans des revues internationales à comités de lecture
  - [a01] M. Schatzman, C.-H. Lamarque et J. Bastien. "An ill-posed mechanical problem with friction". Dans : *Eur. J. Mech. A Solids* 18.3 (1999), pages 415–420. doi : 10.1016/S0997-7538(99)00134-5.
  - [a02] J. Bastien, M. Schatzman et C.-H. Lamarque. "Study of some rheological models with a finite number of degrees of freedom". Dans : *Eur. J. Mech. A Solids* 19.2 (2000), pages 277–307. doi : 10.1016/S0997-7538(00)00163-7.
  - [a03] C.-H. Lamarque et J. Bastien. "Numerical study of a forced pendulum with friction". Dans : *Nonlinear Dynam.* 23.4 (2000), pages 335–352. doi : 10.1023/A:1008328000605.
  - [a04] J. Bastien, M. Schatzman et C.-H. Lamarque. "Study of an elastoplastic model with an infinite number of internal degrees of freedom". Dans : *Eur. J. Mech. A Solids* 21.2 (2002), pages 199–222. doi : 10.1016/S0997-7538(01)01205-0.

- [a05] J. Bastien et M. Schatzman. “Numerical precision for differential inclusions with uniqueness”. Dans : *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 36.3 (2002), pages 427–460. doi : 10.1051/m2an:2002020.
- [a06] C.-H. Lamarque, J. Bastien et M. Holland. “Study of a maximal monotone model with a delay term”. Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 41.4 (2003), pages 1286–1300. doi : 10.1137/S0036142902402547.
- [a07] C.-H. Lamarque, J. Bastien et M. Holland. “Maximal monotone model with delay term of convolution”. Dans : *Math. Probl. Eng.* 4 (2005), pages 437–453. doi : 10.1155/MPE.2005.437.
- [a08] J. Bastien et C.-H. Lamarque. “Maximal monotone model with history term”. Dans : *Non linear Analysis* 63.5-7 (2005), e199–e207. doi : 10.1016/j.na.2005.03.103.
- [a09] C.-H. Lamarque, F. Bernardin et J. Bastien. “Study of a rheological model with a friction term and a cubic term : deterministic and stochastic cases”. Dans : *Eur. J. Mech. A Solids* 24.4 (2005), pages 572–592. doi : 10.1016/j.euromechsol.2005.05.001.

- [a10] J. Bastien et C.-H. Lamarque. "Non smooth dynamics of mechanical systems with history term". Dans : *Nonlinear Dynam.* 47.1-3 (2007), pages 115–128. doi : 10.1007/s11071-006-9061-9.
- [a11] J. Bastien, G. Michon, L. Manin et R. Dufour. "An analysis of the modified Dahl and Masing models : application to a belt tensioner". Dans : *J. Sound Vibration* 302.4-5 (2007), pages 841–864. doi : 10.1016/j.jsv.2006.12.013.
- [a12] J. Bastien et M. Schatzman. "Indeterminacy of a dry friction problem with viscous damping involving stiction". Dans : *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 88.4 (2008), pages 243–255. doi : 10.1002/zamm.200700022.
- [a13] J. Bastien et C. H. Lamarque. "Persoz's gephyroidal model described by a maximal monotone differential inclusion". Dans : *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)* 78.5 (2008), pages 393–407. doi : 10.1007/s00419-007-0171-8.
- [a14] J. Bastien et C.-H. Lamarque. "Theoretical study of a chain sliding on a fixed support". Dans : *Math. Probl.*

Eng. 2009 (2009). Article ID 361296. doi :  
10.1155/2009/361296.

[a15] J. Bastien, P. Legreneur et K. Monteil. "A geometrical alternative to jacobian rank deficiency method for planar workspace characterisation". Dans : *Mechanism and Machine Theory* 45 (2010), pages 335–348. doi :  
10.1016/j.mechmachtheory.2009.09.007.

[a16] J. Bastien. "Convergence order of implicit Euler numerical scheme for maximal monotone differential inclusions". Dans : *Z. Angew. Math. Phys.* 64 (2013), pages 955–966. doi : 10.1007/s00033-012-0276-y.

## ② Comptes rendus à l'Académie des Sciences

[cras1] J. Bastien et M. Schatzman. "Schéma numérique pour des inclusions différentielles avec terme maximal monotone". Dans : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 330.7 (2000), pages 611–615. doi :  
10.1016/S0764-4442(00)00234-2.

[cras2] J. Bastien, P. Legreneur et K. Monteil. "Caractérisation géométrique de la frontière de l'espace de travail d'un système polyarticulé dans le plan". Dans : *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Mécanique)* 335.3

(2007), pages 181–186. doi :  
10.1016/j.crme.2007.03.001.

③ Preprints déposés sur <http://arxiv.org>

- [x1] T. Creveaux, J. Bastien, C. Villars et P. Legreneur. *Model of joint displacement using sigmoid function. Experimental approach for planar pointing task and squat jump*. 2012. arXiv :1207.2627.
- [x2] J. Bastien, Y. Blache et K. Monteil. *Estimation of anthropometrical and inertial body parameters using double integration of residual torques and forces during squat jump*. 2013. arXiv :1305.6426.

④ Articles soumis

- [s1] J. Bastien, Y. Blache et K. Monteil. "Estimation of anthropometrical and inertial body parameters using double integration of residual torques and forces during squat jump". Soumis au *Journal of Quantitative Analysis of Sports*. Voir préprint [x2]. 2013.
- [s2] T. Creveaux, J. Bastien, C. Villars et P. Legreneur. "Model of joint displacement using sigmoid function. Experimental approach for planar pointing task and squat jump". Soumis au *Journal of Quantitative Analysis of Sports*. Voir préprint [x1]. 2013.

## 5 Ouvrages

- [o1] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Paris : Dunod, 2003. 392 pages.
- [o2] J. Bastien, F. Bernardin et C.-H. Lamarque. *Systèmes dynamiques discrets non réguliers déterministes ou stochastiques. applications aux modèles avec frottement ou impact*. Collection Mécanique des structures. Ouvrage traduit en anglais (voir [o2b]). Voir <http://www.lavoisier.fr/livre/h3908.html> Disponible à la BU Sciences de Lyon 1 (cote : 74 BASTIEN, UFR Maths, sous-sol). Hermès Science Publications, 2012. 532 pages.
- [o2b] J. Bastien, F. Bernardin et C.-H. Lamarque. *Non Smooth Deterministic or Stochastic Discrete Dynamical Systems. Applications to Models with Friction or Impact*. Traduction en anglais de [o2]. Voir <http://eu.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-1848215258.html>. Wiley-ISTE, 2013. 512 pages.

## 6 Chapitres d'ouvrages

- [cdo1] C.-H. Lamarque, F. Bernardin, J. Bastien et M. Schatzman. "Modélisation et identification de systèmes discrets hystérétiques en dynamique". Dans : *Problèmes inverses en génie civil*. Sous la direction de P. Argoul, N. Point et G. Dutilleux. Tome 15. Série Sciences pour le génie civil - Collection Études et recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 2009, pages 91–106.
- [cdo2] C.-H. Lamarque, F. Bernardin, M. Holland, J. Bastien et M. Schatzman. "Discrete Models Including Non-smooth Non-linearities of Friction Type". Dans : *Mechanics, Models and Methods in Civil Engineering*. Sous la direction de M. Frémond et F. Maceri. Tome 61. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. [http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-24638-8\\_28](http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-24638-8_28). Springer Berlin Heidelberg, 2012, pages 409–420. doi : 10.1007/978-3-642-24638-8\_28.

 Brevet

- [bre] J. Bastien. "Circuits universels de trains ou de voitures". Brevet FR12 54413. Demande de brevet déposée. Voir

<http://www.universite-lyon.fr/valorisation/circuits-universels-de-trains-ou-de-voitures--183187.kjsp?RH=PRINC> Demande de PCT déposée le 13 mai 2013 (PCT/EP2013/059836). 15 mai 2012.

## 8 Congrès internationaux

- [c01] J. Bastien, C.-H. Lamarque et M. Schatzman. "Study of the Rheological Elastoplastic Models with a Finite number of Degrees of Freedom". Dans : *Proceeding of the ASME, Design Engineering Technical Conferences. DETC/99/VIB-8081*. Las Vegas, Nevada, USA : American Society of Mechanical Engineers (ASME), 12–15 sept. 1999.
- [c02] J. Bastien, C.-H. Lamarque et M. Schatzman. "Numerical schemes for differential inclusions with a maximal monotone terme". Dans : *Forth European Solids Mechanics Conference (ESMC 4)*. Metz, 26–30 juin 2000.
- [c03] J. Bastien, F. Bernardin, C.-H. Lamarque et M. Schatzman. "Numerical methods for mechanical expressed as differential inclusions". Dans : *7-th Conference on dynamical systems theory and applications*. Łódź, Pologne, 8–10 déc. 2003.

- [c04] C.-H. Lamarque, J. Bastien et M. Holland. "Maximal monotone model with delay". Dans : *7-th Conference on dynamical systems theory and applications*. Łódź, Pologne, 8–10 déc. 2003.
- [c05] F. Bernardin, C.-H. Lamarque, J. Bastien et M. Schatzman. "Multivalued stochastic differential equations and applications in dynamics". Dans : *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS2004*. Sous la direction de P Neittaanmäki, T Rossi, S Korotov, E Oñate, J Périaux et D Knörzer. Jyväskylä, 24–28 juil. 2004.
- [c06] J. Bastien et C.-H. Lamarque. "Some models with friction term and history term". Dans : *Enoc 2005, Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference*. Department of Mechanical Engineering, University of Technology. Eindhoven, Pays-Bas, 7–12 août 2005.
- [c07] J. Bastien, G. Michon, L. Manin et R. Dufour. "Rheological and restoring force models regarding belt tensioner dynamic behavior : prediction and experiment". Dans : *ISMA2006 International*

*Conference on Noise and Vibration Engineering.*  
Université Catholique. Louvain, Belgique, 18–20 sept.  
2006.

- [c08] J. Bastien et C.-H. Lamarque. “The Persoz's  
gephyroidal model described by a maximal monotone  
differential inclusion”. Dans : *Computational Methods  
in Structural Dynamics and Earthquake Engineering  
(COMPADYN)*. Rethymno, Crète, Grèce, 13–16 juin  
2007.
- [c09] J. Bastien, P. Legreneur et K. Monteil. “Boundaries of  
the polyarticulated system workspace in the plane”.  
Dans : *First International Conference on Mathematics  
in Sport (IMA Sport)*. The Lowry Centre, Salford  
Quays, Manchester, Royaume Uni, 24–26 juin 2007.
- [c10] C. Villars, J. Bastien, K. Monteil et P. Legreneur.  
“Kinematic modelisation of joint displacement : validation  
in human pointing task”. Dans : *Industrial Simulation  
Conference (ISC 08)*. CESH, Lyon, France, 9–11 juin  
2008.
- [c11] J. Bastien et C.-H. Lamarque. “A finite dimensional  
mechanical system with a cascade of non smooth

constitutive terms". Dans : *Proceedings of European Conference on Nonlinear Oscillations 2008*. Saint-Petersbourg, Russie, 30 juin–4 juil. 2008.

- [c12] T. Creveaux, J. Bastien et P. Legreneur. "Model of joint angle displacement : application to vertical jumping". Dans : *13 ième congrès international de l'ACAPS. Approche Pluridisciplinaire de la Motricité Humaine*. Lyon, 28–30 oct. 2009, pages 49–50.
- [c13] T. Creveaux, J. Bastien, C. Villars et P. Legreneur. "Model of joint displacement using sigmoid function. Experimental approach for planar pointing task and squat jump". Dans : *4th International Conference on Mathematics in Sport*. Sous la direction de D. Goossens, F. Spieksma et P. Scarf. ISBN : 9789081409964. KU Leuven, Faculty of Business and Economics. Leuven, Belgique, 5–7 juin 2013.
- [c14] J. Bastien, Y. Blache et K. Monteil. "Estimation of anthropometrical and inertial body parameters". Dans : *4th International Conference on Mathematics in Sport*. Sous la direction de D. Goossens, F. Spieksma et P. Scarf. ISBN : 9789081409964. KU Leuven, Faculty

of Business and Economics. Leuven, Belgique, 5–7 juin 2013.

9 Congrès et workshop français

- [cf1] J. Bastien, C.-H. Lamarque et M. Schatzman. “Sur quelques modèles rhéologiques”. Dans : *Modélisation mathématique et tribologie : lubrification et frottements secs*. Université Claude Bernard-Lyon I et l’INSA de Lyon. Lyon, 17–18 sept. 1998.
- [cf2] J. Bastien, C.-H. Lamarque et M. Schatzman. “Analyse numérique de quelques modèles élastoplastiques en dynamique”. Dans : *Quatorzième congrès français de mécanique*. Toulouse, 30 août–2 sept. 1999.
- [cf3] J. Bastien, M. Schatzman et C.-H. Lamarque. “Analyse numérique de systèmes différentiels gouvernant le comportement dynamique de quelques modèles élastoplastiques”. Dans : *Congrès d’analyse numérique organisé par la SMAI et l’UTC*. Pompadour, mai 2001.
- [cf4] J. Bastien et C.-H. Lamarque. “Un modèle de matériaux géphyroïdes en dynamique”. Dans : *Journée scientifique Interfaces, stabilité, comportement*.

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (CNRS).  
Marseille France, 30 mar. 2007.

- [cf5] J. Bastien et C.-H. Lamarque. "Un modèle rhéologique discret non classique en dynamique". Dans : 18<sup>ème</sup> *Congrès Français de Mécanique (CFM2007)*. Association Française de Mécanique. 27–31 août 2007.

## 10 Divers

- [d1] J. Bastien. "Étude théorique et numérique d'inclusions différentielles maximales monotones. Applications à des modèles élastoplastiques." Numéro d'ordre : 96-2000. Thèse de doctorat. Université Lyon I, 2000.
- [d2] J. Bastien. "Systèmes dynamiques discrets avec frottement et Identification en biomécanique". Disponible sur [http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/liste\\_publicis.html](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/liste_publicis.html) à la référence « [d2] ». Numéro d'ordre : 26-2013. Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches. Soutenance prévue le 18 septembre. Université Lyon I, 2013.

## B Autres références

- [AMD02] A. Al Majid et R. Dufour. "Formulation of a hysteretic restoring force model. Application to vibration isolation". Dans : *Nonlinear Dynamics* 27 (2002), pages 69–85.

- [AMD04] A. Al Majid et R. Dufour. "Harmonic response of a structure mounted on an isolator modelled with a hysteretic operator : Experiment and prediction". Dans : *Journal of Sound and Vibration* 277 (2004), pages 391–403.
- [Ber04] F. Bernardin. "Equations différentielles stochastiques multivoques - Aspects théoriques et numériques - Applications". Numéro d'ordre : 243-2004.  
<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00008778>.  
Thèse de doctorat. Université Lyon I, 2004.
- [Bli90] P. J. Bliman. "Etude mathématique d'un modèle de frottement sec : le modèle de P.R. Dahl." Thèse de doctorat. Université de Paris IX-Dauphine, 1990.
- [Bli92] P. J. Bliman. "Mathematical study of the Dahl's friction model". Dans : *European J. Mech. A Solids* 11.6 (1992), pages 835–848.
- [Bré72] H. Brézis. "Problèmes unilatéraux". Dans : *J. Math. Pures Appl.* 51 (1972), pages 1–168.
- [Bré73] H. Brézis. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).

Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1973,  
pages vi+183.

- [CE75] M. G. Crandall et L. C. Evans. "On the relation of the operator  $\partial/\partial s + \partial/\partial \tau$  to evolution governed by accretive operators". Dans : *Israel J. Math.* 21.4 (1975), pages 261–278.
- [Cre09] T. Creveaux. "Des données expérimentales à la modélisation d'un mouvement dynamique : cas du squat jump." Numéro d'ordre : 132-2009. Thèse de doctorat. Université Lyon I, 2009.
- [DL92] A. L. Dontchev et F. Lempio. "Difference methods for differential inclusions : a survey". Dans : *SIAM Rev.* 34.2 (1992), pages 263–294.
- [Ell85] C. M. Elliott. "On the convergence of a one-step method for the numerical solution of an ordinary differential inclusion". Dans : *IMA J. Numer. Anal.* 5.1 (1985), pages 3–21. doi : 10.1093/imanum/5.1.3.
- [Hof92] A. L. Hof. "An explicit expression for the moment in multibody systems." Dans : *J Biomech* 25.10 (oct. 1992), pages 1209–1211.

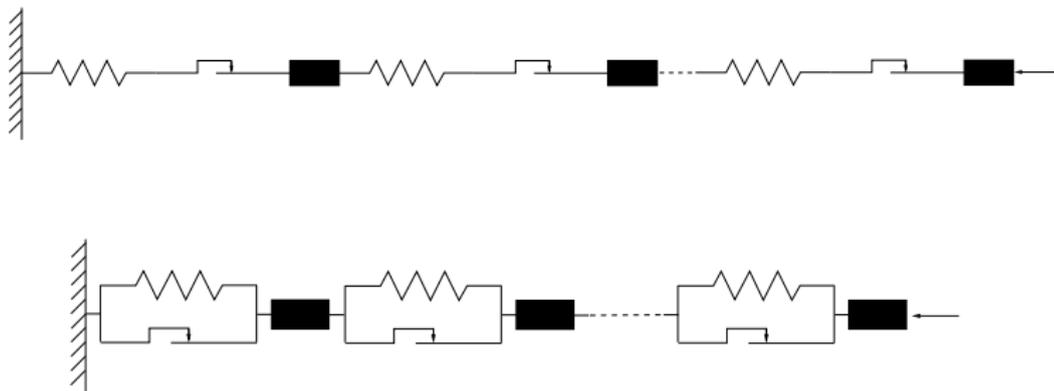
- [Hol01] M. Holland. "Prise en compte d'effets différés dans des systèmes discrets comportant des nonlinéarités irrégulières". Mémoire de master 2. Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat, 2001.
- [Kuo98] A. D Kuo. "A Least-Squares Estimation Approach to Improving the Precision of Inverse Dynamics Computations". Dans : *ASME J. Biomech. Eng* 120.1 (1998), pages 148–159.
- [Lip90] G. Lippold. "Error estimates for the implicit Euler approximation of an evolution inequality". Dans : *Nonlinear Anal.* 15.11 (1990), pages 1077–1089.
- [Mic06] G. Michon. "Dynamique non-linéaire des entraînements par courroies. Analyses théoriques et expérimentales." Numéro d'ordre : 2006-ISAL-0048. Thèse de doctorat. Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2006.
- [MMD05] G. Michon, L. Manin et R. Dufour. "Hysteretic behavior of a belt tensioner : Modeling and Experimental investigation". Dans : *Journal of Vibration and Control* 11.9 (2005), pages 1147–1158.
- [NSV00] R. H. Nochetto, G. Savaré et C. Verdi. "A posteriori error estimates for variable time-step discretizations of nonlinear

evolution equations". Dans : *Comm. Pure Appl. Math.* 53.5 (2000), pages 525–589.

- [RHW08] R. Riemer et E. T. Hsiao-Wecksler. "Improving joint torque calculations : optimization-based inverse dynamics to reduce the effect of motion errors." Dans : *J Biomech* 41.7 (2008), pages 1503–1509. doi : 10.1016/j.jbiomech.2008.02.011.
- [RHW09] R. Riemer et E. T. Hsiao-Wecksler. "Improving net joint torque calculations through a two-step optimization method for estimating body segment parameters." Dans : *J Biomech Eng* 131.1 (jan. 2009), pages 011007–1–011007–7. doi : 10.1115/1.3005155.
- [Rul96] J. Rulla. "Error analysis for implicit approximations to solutions to Cauchy problems". Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 33.1 (1996), pages 68–87. doi : 10.1137/0733005.
- [Vau+82] C. L. Vaughan, J. G. Andrews, et J. G. Hay. "Selection of Body Segment Parameters by Optimization Methods". Dans : *ASME J. Biomech. Eng.* (1982), pages 38–44.
- [Vil08] C. Villars. "Les tâches de pointages : approches expérimentale et théorique". Mémoire de master 2. Université Lyon I, 2008.

- [Vis94] A. Visintin. *Differential models of hysteresis*. Berlin : Springer-Verlag, 1994.
- [Win09] D. Winter. *Biomechanics and Motor Control of Human Movement*. 4<sup>e</sup> édition. New York : John Wiley et Sons, 2009.

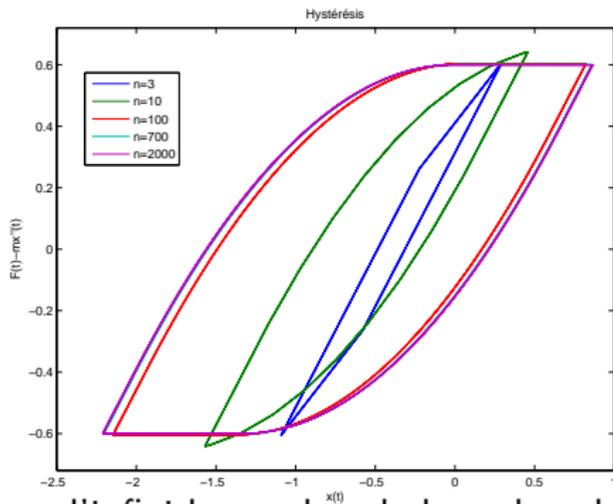
## Assemblage et résultats en dimension finie : exemple



Ce dernier fait intervenir la fonction convexe définie par

$$\phi(X) = \phi(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 |x_1| + \sum_{i=2}^n \alpha_i |x_i - x_{i-1}|$$

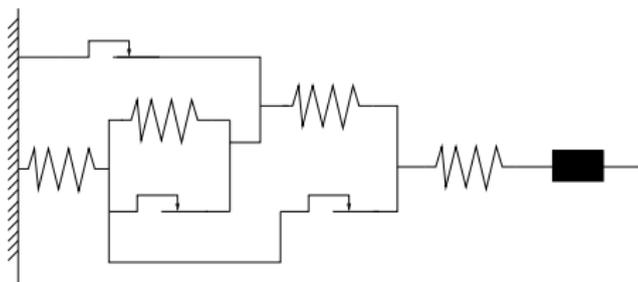
## Modèle continu



On fait tendre vers l'infini le nombre de branches du modèle de Prandtl. On obtient alors des cycles d'hystérésis continus, sans aspect anguleux, contrairement au cas discret.

J. Bastien, M. Schatzman et C.-H. Lamarque. "Study of an elastoplastic model with an infinite number of internal degrees of freedom". Dans : *Eur. J. Mech. A Solids* 21.2 (2002), pages 199–222. doi : 10.1016/S0997-7538(01)01205-0

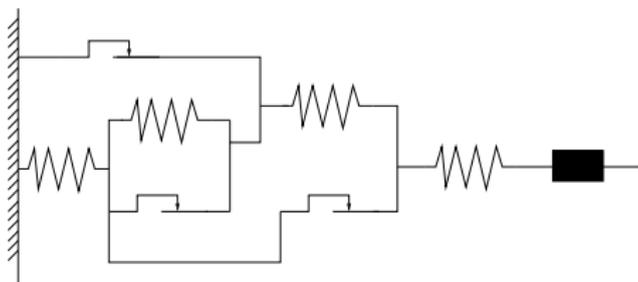
# Modèle géphyroïde



On transforme les équations obtenues, en conservant les variables adéquates, et en utilisant le changement du produit scalaire du lemme 4, on obtient encore une inclusion du type (9) avec  $A = \partial\phi$ .

J. Bastien et C. H. Lamarque. "Persoz's gephyroidal model described by a maximal monotone differential inclusion". Dans : *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)* 78.5 (2008), pages 393–407. doi :  
10.1007/s00419-007-0171-8

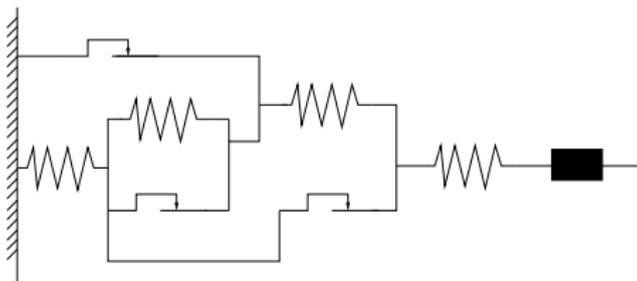
# Modèle géphyroïde



On transforme les équations obtenues, en conservant les variables adéquates, et en utilisant le changement du produit scalaire du lemme 4, on obtient encore une inclusion du type (9) avec  $A = \partial\phi$ .

J. Bastien et C. H. Lamarque. "Persoz's gephyroidal model described by a maximal monotone differential inclusion". Dans : *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)* 78.5 (2008), pages 393–407. doi : [10.1007/s00419-007-0171-8](https://doi.org/10.1007/s00419-007-0171-8)

# Modèle géphyroïde



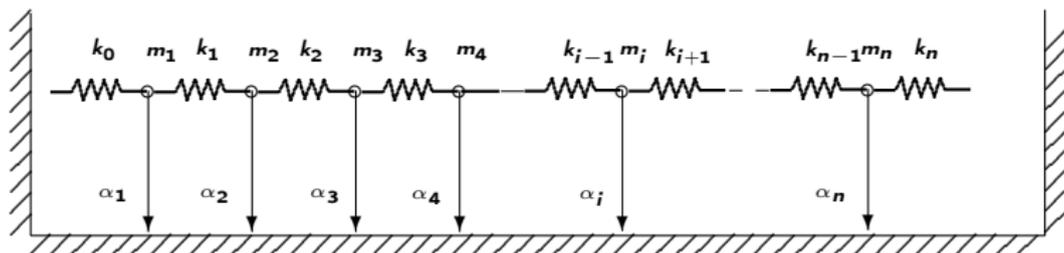
On transforme les équations obtenues, en conservant les variables adéquates, et en utilisant le changement du produit scalaire du lemme 4, on obtient encore une inclusion du type (9) avec  $A = \partial\phi$ .

J. Bastien et C. H. Lamarque. “Persoz’s gephyroidal model described by a maximal monotone differential inclusion”. Dans : *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)* 78.5 (2008), pages 393–407. doi :

10.1007/s00419-007-0171-8

# Chaîne élastoplastique

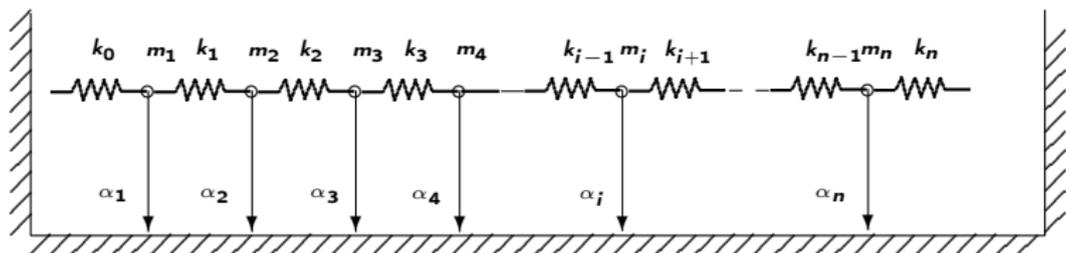
- Modèle de chaîne élastique avec contact de frottement sur un support fixe ;
- Différentes conditions initiales (force ou déplacement) ;
- Comportement dynamique ou quasi-statique.



J. Bastien et C.-H. Lamarque. "Theoretical study of a chain sliding on a fixed support". Dans : *Math. Probl. Eng.* 2009 (2009). Article ID 361296. doi : 10.1155/2009/361296

# Chaîne élastoplastique

- Modèle de chaîne élastique avec contact de frottement sur un support fixe ;
- Différentes conditions initiales (force ou déplacement) ;
- Comportement dynamique ou quasi-statique.



J. Bastien et C.-H. Lamarque. "Theoretical study of a chain sliding on a fixed support". Dans : *Math. Probl. Eng.* 2009 (2009). Article ID 361296. doi : 10.1155/2009/361296

# Une application industrielle : étude d'un tendeur de courroie

Le premier modèle (MM) est décrit par l'inclusion

$$\dot{w} + \beta \left( \frac{w}{\eta} \right) \ni \dot{u},$$

$$\mathcal{F} = kw + k_0 u + c\dot{u} - \mathcal{F}_0.$$

Le second (MD) est décrit par

$$\dot{\mathcal{F}}(t) = \begin{cases} \Lambda |\dot{u}(t)| \operatorname{signe}(h_u(u(t)) - \mathcal{F}(t)) |h_u(u(t)) - \mathcal{F}(t)|^\mu, & \text{si } \dot{u}(t) \geq 0, \\ \Lambda |\dot{u}(t)| \operatorname{signe}(h_l(u(t)) - \mathcal{F}(t)) |h_l(u(t)) - \mathcal{F}(t)|^\mu, & \text{si } \dot{u}(t) \leq 0, \end{cases}$$

où les fonctions  $h_l$  et  $h_u$  sont définies par

$$h_u(u) = au + b, \quad h_l(u) = du + e.$$

# Une application industrielle : étude d'un tendeur de courroie

Le premier modèle (MM) est décrit par l'inclusion

$$\dot{w} + \beta \left( \frac{w}{\eta} \right) \ni \dot{u},$$

$$\mathcal{F} = kw + k_0 u + c\dot{u} - \mathcal{F}_0.$$

Le second (MD) est décrit par

$$\dot{\mathcal{F}}(t) =$$

$$\begin{cases} \Lambda |\dot{u}(t)| \operatorname{signe}(h_u(u(t)) - \mathcal{F}(t)) |h_u(u(t)) - \mathcal{F}(t)|^\mu, & \text{si } \dot{u}(t) \geq 0, \\ \Lambda |\dot{u}(t)| \operatorname{signe}(h_l(u(t)) - \mathcal{F}(t)) |h_l(u(t)) - \mathcal{F}(t)|^\mu, & \text{si } \dot{u}(t) \leq 0, \end{cases}$$

où les fonctions  $h_l$  et  $h_u$  sont définies par

$$h_u(u) = au + b, \quad h_l(u) = du + e.$$

## Tâches de pointage et squat-jumps

9 sujets masculins droitiers ont réalisés des tâches de pointages. Le nombre total de tâche est de 304. Les articulations sont l'épaule, le coude, le poignet et l'extrémité d'un doigts.

Les données du squat jump viennent de [s1 ; x2]. L'expérience est la suivante : 12 sujets ont réalisé entre 5 et 10 sauts (moyenne ; 7.25), totalisant 97 squat jumps. Quelques résultats ont été retirés, ce qui fait passer à 87 le nombre de sauts. Les articulations sont l'épaule, la hanche, le genou, la cheville et l'orteil.

## Tâches de pointage et squat-jumps

9 sujets masculins droitiers ont réalisés des tâches de pointages. Le nombre total de tâche est de 304. Les articulations sont l'épaule, le coude, le poignet et l'extrémité d'un doigts.

Les données du squat jump viennent de  $[s1 ; x2]$ . L'expérience est la suivante : 12 sujets ont réalisé entre 5 et 10 sauts (moyenne ; 7.25), totalisant 97 squat jumps. Quelques résultats ont été retirés, ce qui fait passer à 87 le nombre de sauts. Les articulations sont l'épaule, la hanche, le genou, la cheville et l'orteil.

# Traitement des données

Une première optimisation consiste à minimiser au sens des moindres carrés la différence entre les angles expérimentaux  $\theta^i$  et ceux déterminés par les modèles sigmoïdes  $\sigma^i$  :

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^n (\theta^i - \sigma^i)^2.$$

Ensuite, la différence entre les coordonnées expérimentales et reconstruites des articulations est minimisée au sens des moindres carrés :

$$\mathcal{S}' = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n (X_j^i - x_j^i)^2 + (Y_j^i - y_j^i)^2.$$

# Traitement des données

Une première optimisation consiste à minimiser au sens des moindres carrés la différence entre les angles expérimentaux  $\theta^i$  et ceux déterminés par les modèles sigmoïdes  $\sigma^i$  :

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^n (\theta^i - \sigma^i)^2.$$

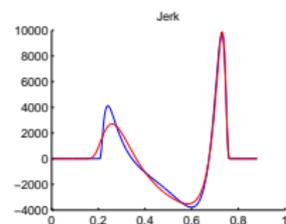
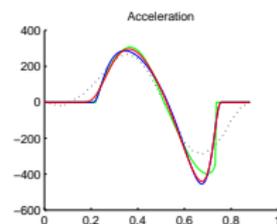
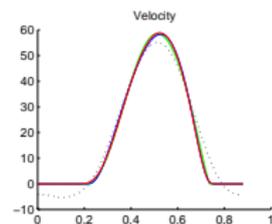
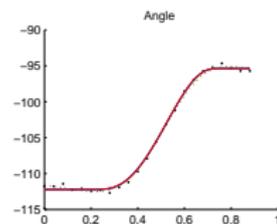
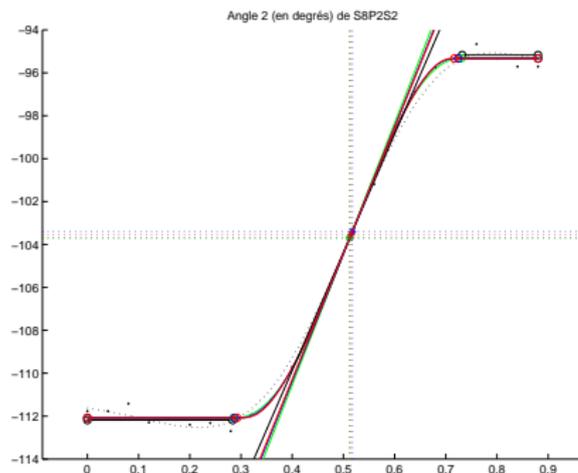
Ensuite, la différence entre les coordonnées expérimentales et reconstruites des articulations est minimisée au sens des moindres carrés :

$$\mathcal{S}' = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n (X_j^i - x_j^i)^2 + (Y_j^i - y_j^i)^2.$$

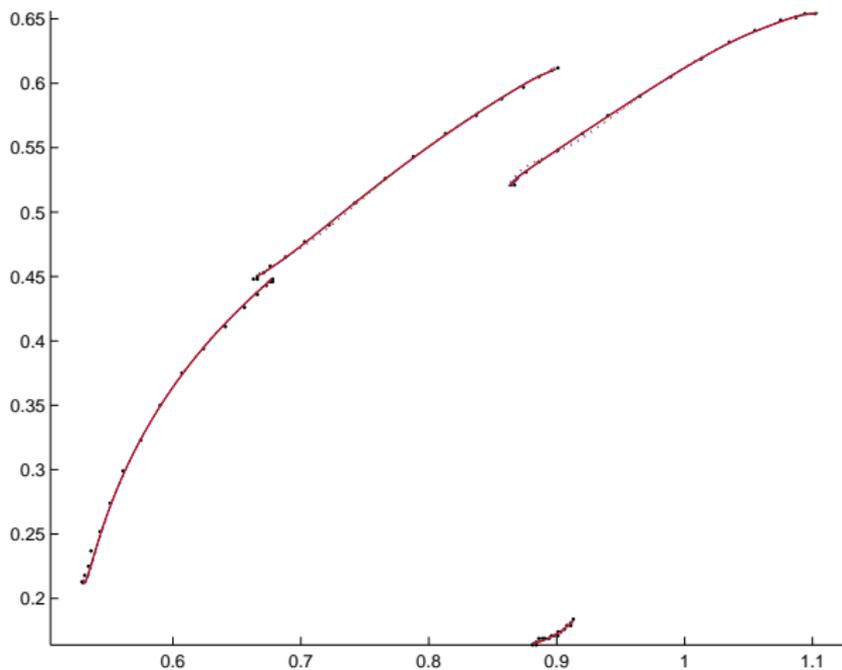
# Exemple pour le deuxième angle pour une tâche de pointage

Résultat de la première optimisation

Résultat de la seconde optimisation

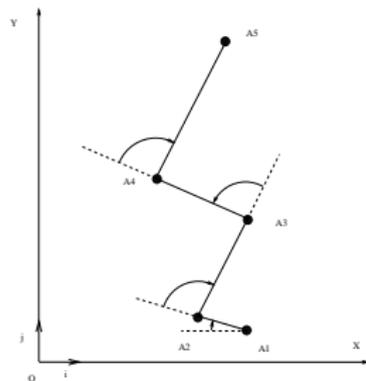


# Trajectoires expérimentales et reconstruites

[▸ Retour](#)

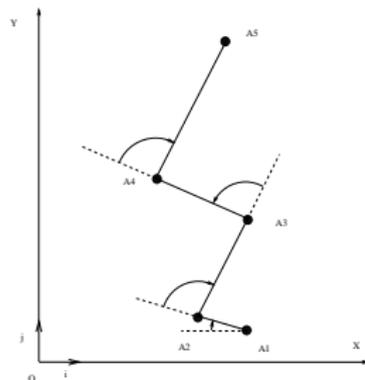
# Mouvement étudié

- Voir protocole de la section « Sigmoïdes et déplacements articulaires ».
- Les paramètres inertiels et anthropométriques sont définis par  $\alpha_j = A_j G_j / A_j A_{j+1}$  et grâce au rayon de giration normalisés  $\tilde{r}_j = r_j / A_j A_{j+1} \cdot \alpha_j$ , pour  $1 \leq j \leq 3$ , est déterminé par Winter [Win09].



# Mouvement étudié

- Voir protocole de la section « Sigmoïdes et déplacements articulaires ».
- Les paramètres inertiels et anthropométriques sont définis par  $\alpha_j = A_j G_j / A_j A_{j+1}$  et grâce au rayon de giration normalisés  $\tilde{r}_j = r_j / A_j A_{j+1} \cdot \alpha_j$ , pour  $1 \leq j \leq 3$ , est déterminé par Winter [Win09].



# Détermination des $l_j$ (ordre 0)

On pose

$$\tilde{C}^{(0)}(t) = C_{\text{exp}} - C_{\text{angl}}, \quad (21a)$$

où  $C_{\text{exp}}$  est le couple d'appui mesuré expérimentalement et

$$C_{\text{angl}} = - \sum_{j=1}^{q-1} \mathcal{M}_j + \sum_{j=1}^{q-1} l_j \ddot{\phi}_j, \quad (21b)$$

Il est classique que le couple  $\tilde{C}^{(0)}$  est nul en théorie [Hof92]. On cherche à déterminer  $l_j$  qui minimise ce couple résiduel comme dans [RHW08 ; RHW09 ; Kuo98 ; Vau+82].

## Détermination des $l_j$ (ordre 0, 1 et 2)

- Si on intègre (21), zéro, une ou deux fois, on obtient alors des quantités qui font intervenir les dérivées des angles, d'ordre 2, 1 ou 0. Les résiduels associés sont notés  $\tilde{C}^{(0)}$ ,  $\tilde{C}^{(1)}$  et  $\tilde{C}^{(2)}$ .
- Pour comparer ces résiduels, on définit les erreurs suivantes, adimensionnelles :

$$\varepsilon^{(j)} = \frac{\|C_{\text{exp}}^{(j)} - C_{\text{ang}}^{(j)}\|}{\|C_{\text{exp}}^{(j)}\| + \|C_{\text{ang}}^{(j)}\|} \in [0, 1], \quad (22)$$

où  $\| \cdot \|$  est la norme  $l^2$ .

## Détermination des $l_j$ (ordre 0, 1 et 2)

- Si on intègre (21), zéro, une ou deux fois, on obtient alors des quantités qui font intervenir les dérivées des angles, d'ordre 2, 1 ou 0. Les résiduels associés sont notés  $\tilde{C}^{(0)}$ ,  $\tilde{C}^{(1)}$  et  $\tilde{C}^{(2)}$ .
- Pour comparer ces résiduels, on définit les erreurs suivantes, adimensionnelles :

$$\varepsilon^{(j)} = \frac{\|C_{\text{exp}}^{(j)} - C_{\text{ang}}^{(j)}\|}{\|C_{\text{exp}}^{(j)}\| + \|C_{\text{ang}}^{(j)}\|} \in [0, 1], \quad (22)$$

où  $\| \cdot \|$  est la norme  $l^2$ .

## Détermination des $I_j$ (méthodes A, B et C)

- Méthode A : Si aucune des inerties  $I_j$  est connue, on aboutit à un système linéaire surdimensionné, à résoudre au sens des moindres carrés en  $I_i$ , pour  $1 \leq i \leq 4$ .  $\implies$  Mauvaise méthode car les  $I_j$  sont négatifs ou sans aucune commune mesure avec ceux donnés par Winter [Win09].
- Méthode B : On suppose connues les inerties des membres inférieurs (pied, jambe et Cuisse) et on cherche celle du tronc-tête-bras,  $I_4$ . On obtient des résultats proches de ceux de Winter.
- Méthode C : On suppose connues toutes les inerties, grâce aux données de Winter. C'est une méthode de contrôle qui n'est pas une méthode d'optimisation.

On obtient donc neuf méthodes (A, B et C et d'ordre 0, 1 ou 2).

## Détermination des $I_j$ (méthodes A, B et C)

- Méthode A : Si aucune des inerties  $I_j$  est connue, on aboutit à un système linéaire surdimensionné, à résoudre au sens des moindres carrés en  $I_i$ , pour  $1 \leq i \leq 4$ .  $\implies$  Mauvaise méthode car les  $I_j$  sont négatifs ou sans aucune commune mesure avec ceux donnés par Winter [Win09].
- Méthode B : On suppose connues les inerties des membres inférieurs (pied, jambe et Cuisse) et on cherche celle du tronc-tête-bras,  $I_4$ . On obtient des résultats proches de ceux de Winter.
- Méthode C : On suppose connues toutes les inerties, grâce aux données de Winter. C'est une méthode de contrôle qui n'est pas une méthode d'optimisation.

On obtient donc neuf méthodes (A, B et C et d'ordre 0, 1 ou 2).

## Détermination des $I_j$ (méthodes A, B et C)

- Méthode A : Si aucune des inerties  $I_j$  est connue, on aboutit à un système linéaire surdimensionné, à résoudre au sens des moindres carrés en  $I_i$ , pour  $1 \leq i \leq 4$ .  $\implies$  Mauvaise méthode car les  $I_j$  sont négatifs ou sans aucune commune mesure avec ceux donnés par Winter [Win09].
- Méthode B : On suppose connues les inerties des membres inférieurs (pied, jambe et Cuisse) et on cherche celle du tronc-tête-bras,  $I_4$ . On obtient des résultats proches de ceux de Winter.
- Méthode C : On suppose connues toutes les inerties, grâce aux données de Winter. C'est une méthode de contrôle qui n'est pas une méthode d'optimisation.

On obtient donc neuf méthodes (A, B et C et d'ordre 0, 1 ou 2).

## Détermination des $I_j$ (méthodes A, B et C)

- Méthode A : Si aucune des inerties  $I_j$  est connue, on aboutit à un système linéaire surdimensionné, à résoudre au sens des moindres carrés en  $I_i$ , pour  $1 \leq i \leq 4$ .  $\implies$  Mauvaise méthode car les  $I_j$  sont négatifs ou sans aucune commune mesure avec ceux donnés par Winter [Win09].
- Méthode B : On suppose connues les inerties des membres inférieurs (pied, jambe et Cuisse) et on cherche celle du tronc-tête-bras,  $I_4$ . On obtient des résultats proches de ceux de Winter.
- Méthode C : On suppose connues toutes les inerties, grâce aux données de Winter. C'est une méthode de contrôle qui n'est pas une méthode d'optimisation.

On obtient donc neuf méthodes (A, B et C et d'ordre 0, 1 ou 2).

# Bilan des méthodes

- Pour chacune d'elles, on calcule  $\varepsilon_X^{(j)}$  et  $R^2_X^{(j)}$ , l'erreur adimensionnelle et le coefficient de détermination multiple du système au moindre carré. Une méthode exacte correspond à  $\varepsilon$ , proche de 0 and  $R^2$  proche de 1.
- Généralisation sur la population (12 sujets). Les données ne sont pas normales contrairement à leur logarithme.

# Bilan des méthodes

- Pour chacune d'elles, on calcule  $\varepsilon_X^{(j)}$  et  $R^2_X^{(j)}$ , l'erreur adimensionnelle et le coefficient de détermination multiple du système au moindre carré. Une méthode exacte correspond à  $\varepsilon$ , proche de 0 and  $R^2$  proche de 1.
- Généralisation sur la population (12 sujets). Les données ne sont pas normales contrairement à leur logarithme.

## Statistiques par groupe

Pour  $\log_{10}(\varepsilon_X^{(j)})$  :

degrés $j$	méthode A	méthode B	méthode C
0	$-0.46 \pm 0.16$	$-0.35 \pm 0.14$	$-0.28 \pm 0.1$
1	$-1.06 \pm 0.29$	$-0.59 \pm 0.3$	$-0.37 \pm 0.25$
2	$-1.83 \pm 0.44$	$-1.01 \pm 0.38$	$-0.49 \pm 0.33$

Pour  $\log_{10}(1 - R_X^{2(j)})$  :

degrés $j$	méthode A	méthode B	méthode C
0	$-0.27 \pm 0.28$	$-0.05 \pm 0.23$	$0.11 \pm 0.24$
1	$-1.47 \pm 0.48$	$-0.52 \pm 0.31$	$0.03 \pm 0.54$
2	$-2.99 \pm 0.73$	$-1.37 \pm 0.56$	$-0.2 \pm 0.82$

## Statistiques par groupe

Pour  $\log_{10}(\varepsilon_X^{(j)})$  :

degrés $j$	méthode A	méthode B	méthode C
0	$-0.46 \pm 0.16$	$-0.35 \pm 0.14$	$-0.28 \pm 0.1$
1	$-1.06 \pm 0.29$	$-0.59 \pm 0.3$	$-0.37 \pm 0.25$
2	$-1.83 \pm 0.44$	$-1.01 \pm 0.38$	$-0.49 \pm 0.33$

Pour  $\log_{10}(1 - R_X^{2(j)})$  :

degrés $j$	méthode A	méthode B	méthode C
0	$-0.27 \pm 0.28$	$-0.05 \pm 0.23$	$0.11 \pm 0.24$
1	$-1.47 \pm 0.48$	$-0.52 \pm 0.31$	$0.03 \pm 0.54$
2	$-2.99 \pm 0.73$	$-1.37 \pm 0.56$	$-0.2 \pm 0.82$

# Résultat final

On obtient

$$A2 < B2 = A1 < B1 < C2 < C0, \quad (23a)$$

$$B2 < B1 < B0, \quad (23b)$$

$$A0 < B0, \quad (23c)$$

La méthode A étant évincée, la meilleure méthode est donc B2.

▸ Retour