

# CONSTRUCTION ET ÉNUMÉRATION DE CIRCUITS APTES À GUIDER UN VÉHICULE MINIATURE

JÉRÔME BASTIEN

RÉSUMÉ. Contrairement aux circuits traditionnels de jeux pour trains miniatures, un système breveté permet de créer un grand nombre de circuits, avec un nombre minimum de rails, dont les boucles se referment toujours bien. Ces circuits ressemblent fortement aux traditionnels polygones autoévitant, dont l'énumération explicite n'est pas encore résolue pour un nombre quelconque de carrés ; cependant, de nombreuses différences les opposent, dont notamment le fait que les contraintes géométriques sont différentes de celles des polygones autoévitant. Nous présentons la méthodologie permettant de construire et d'énumérer tous les circuits possibles contenant un nombre de pièces donné. Pour de petits nombres de pièces, l'énumération exacte sera traitée. Pour des nombres de pièces plus importants, seule une estimation sera proposée. Dans ce dernier cas, une construction aléatoire de circuit est aussi donnée. Nous donnerons quelques pistes de généralisations à d'autres problèmes similaires, mais plus variés.

ABSTRACT. In contrast to traditional toy tracks, a patented system allows the creation of a large number of tracks with a minimal number of pieces, and whose loops always close properly. These circuits strongly resemble traditional self-avoiding polygons (whose explicit enumeration has not yet been resolved for an arbitrary number of squares) yet there are numerous differences, notably the fact that the geometric constraints are different than those of self-avoiding polygons. We present the methodology allowing the construction and enumeration of all of the possible tracks containing a given number of pieces. For small numbers of pieces, the exact enumeration will be treated. For greater numbers of pieces, only an estimation will be offered. In the latter case, a randomly construction of circuits is also given. We will give some routes for generalizations for similar problems.

*This version is the French translation of the article* : J. Bastien. "Construction and enumeration of circuits capable of guiding a miniature vehicle". In: *Recreational Mathematics Magazine* 3.6 (2016). Available on <http://rmm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/1163>, pages 5–42. DOI: 10.1515/rmm-2016-0006

*Cette version est la version française de l'article* J. BASTIEN. "Construction and enumeration of circuits capable of guiding a miniature vehicle". Dans : *Recreational Mathematics Magazine* 3.6 (2016). Disponible sur <http://rmm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/1163>, pages 5–42. DOI : 10.1515/rmm-2016-0006

## 1. Introduction

Les circuits pour enfants existent depuis longtemps et permettent de transporter aussi bien des petits trains de bois que des voitures ou des trains miniatures. Il existe aujourd'hui des circuits formés d'un très grand nombre de pièces différentes, c'est-à-dire supérieur à dix. Ce grand nombre de pièces

---

*Date*: 12 janvier 2017.

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary 82B41 ; Secondary 05A15 05A16.

*Key words and phrases*. Chemins autobouclant, Chemins fermés, Circuits de jeux, Combinatoire, Énumération exacte et asymptotique.

est intéressant car il permet de fabriquer différents circuits à partir du même ensemble de pièces. En revanche, à cause de ce grand nombre de pièces différentes, il existe aussi de nombreuses situations où il n'est pas possible de raccorder simplement les deux extrémités du circuit pour le refermer sur lui-même. Dans certains cas, cela n'est tout simplement pas possible. Souvent, les circuits proposés présentent un jeu, plus ou moins important, qui permet de créer de grands circuits. Ce jeu, d'origine géométrique, est pris en compte dans les pièces constituant ces circuits. Par exemple, les pièces de connexions (tenon/mortaise) des rails *Brio*® laissent les rails se déplacer très légèrement entre eux. Les rails de trains de modélisme peuvent être légèrement déformés afin de boucler le circuit. L'accumulation de ces jeux permet certes de boucler le circuit construit, néanmoins ce jeu rend souvent difficile la fermeture de la boucle et, si celle-ci se referme, il est aussi possible que la discontinuité produite fasse dérailler les véhicules miniatures qui empruntent ces circuits.

Le système breveté *Easyloop* vise à pallier ces inconvénients en proposant un circuit ou un ensemble de pièces de guidage qui :

- permet la réalisation d'un grand nombre de circuits fermés à partir du même ensemble de pièces,
- utilise un minimum de pièces de guidage différentes,
- garantit qu'il est toujours possible de refermer simplement le circuit sur lui-même.

Le jeu entre les pièces de ce système sera rigoureusement nul, contrairement aux systèmes traditionnels, permettant un emboîtement parfait des boucles du circuit. La fabrication prévoira toutefois un jeu très faible permettant la connexion entre elles des pièces du circuit grâce à des couples de tenons/mortaises. Typiquement, ce système concerne le domaine des circuits de trains pour enfants. Il peut concerner également le domaine des circuits de petites voitures ou similaires.

La construction des pièces de ces circuits, qui a donné lieu à un brevet [Bas12; Bas13], n'est pas l'objet de cet article, même si celle-ci est sommairement rappelée en section 2. Notons cependant que, d'un point de vue pédagogique et didactique, la construction de ces circuits a fait l'objet de divers exposés à différents publics, du grand public jusqu'à un séminaire « détente » niveau L3 à Doctorat, en passant par des élèves de lycées (voir [Bas15a; Bas15b]); ces circuits font appel à différentes notions de géométrie couvrant le programme du collège et du lycée jusqu'à la licence (théorème de Pythagore, tangente, cercle, parabole, courbes de Bézier, rayon de courbure, pavage, dénombrement), qui peuvent être évoquées de façon différenciée et adaptée au public concerné. Une collaboration est envisagée avec Nicolas Pelay, de l'association Plaisir Maths et nous allons tenter ensemble de promouvoir le jeu sur son versant pédagogique et didactique.

La motivation initiale des travaux présentés ici était une question posée par un industriel : « Est-ce qu'il est possible de dénombrer tous les circuits réalisables à partir d'un nombre de pièces donné ? » L'objectif de cet article est d'essayer de répondre à cette question. Nous présenterons en section 3 la méthodologie permettant de construire et d'énumérer tous les circuits possibles contenant un nombre de pièces donné. Pour des nombre de pièces plus important, seule une estimation sera proposée (section 4). Dans ce dernier cas, une construction aléatoire de circuit est aussi donnée (section 5). Nous donnerons quelques pistes de généralisations en section 6.

Tous les algorithmes présentés dans cet article ont été implémentés informatiquement et ont permis aussi bien de déterminer les différents circuits présentés ici que de les tracer à l'échelle. Quatre exécutables (distribués uniquement pour Windows) et une documentation en français permettant d'installer les bibliothèques graphiques, de créer des circuits de façon manuelle ou aléatoire et de les dessiner sont disponibles sur Internet aux url données en annexe A.

Deux catalogues ont été créés de façon totalement automatique ; voir annexe A.

## 2. Principe du système breveté

### 2.1. Construction des courbes de base

Le principe de ce système est de définir un chemin  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^2$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , ce qui assurera la continuité entre deux pièces successives du circuit ainsi que leur bon assemblage. Soit  $N$  un entier naturel quelconque non nul. Deux idées fondamentales sont utilisées :

- On considère un ensemble de carrés  $\mathcal{C}_i$ ,  $1 \leq i \leq N$  appartenant tous à un pavage du plan par des carrés, de côté défini par

$$L_0 = 1. \quad (1)$$

On supposera donc, sans perte de généralité, que les coordonnées des centres des carrés  $\mathcal{C}_i$  sont entières. Chaque carré contient une partie du chemin  $\Gamma$  et l'intersection d'un carré  $\mathcal{C}_i$  avec  $\Gamma$  est notée  $\Gamma_i$ .

- Pour chacun des carré  $\mathcal{C}_i$ , la courbe  $\Gamma_i$  doit vérifier les contraintes suivantes :
  - elle est contenue dans le carré  $\mathcal{C}_i$ ,
  - elle débute sur un sommet du carré ou un milieu d'un côté du carré en un point  $A_i$  et se termine sur un autre sommet du carré ou un milieu d'un autre côté du carré en un point  $B_i$ ,
  - elle est tangente en  $A_i$  et en  $B_i$  aux droites reliant respectivement le centre du carré aux points  $A_i$  et  $B_i$ .

Ainsi, le chemin  $\Gamma$  sera défini comme la réunion des courbes  $(\Gamma_i)_{1 \leq i \leq N}$ . Pour  $1 \leq i \leq N - 1$ , chacun des carrés  $\mathcal{C}_i$  doit avoir en commun un unique sommet ou un unique côté avec le carré voisin  $\mathcal{C}_{i+1}$ . Si  $i = N$ , la même règle s'applique pour les carrés  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_N$ . On peut donc définir le chemin  $\Gamma$ , à partir des centre  $(c_i)_{1 \leq i \leq N}$  des carrés  $\mathcal{C}_i$ , à coordonnées entières. Ce problème s'apparente donc très fortement à la recherche de chemins autoévitant, décrits dans [Sla11 ; MS93] dans le cas plan, mais surtout au cas particulier correspondant au cas où l'origine et l'extrémités sont identiques, c'est-à-dire, le cas des polygones autoévitant, décrits dans [Sla11 ; Jen03 ; JG99 ; Gut12b ; Gut12a ; CJ12]. Cinq différences essentielles opposent les circuits de jeux aux polygones autoévitant. D'une part, dans [Sla11 ; Jen03 ; JG99 ; Gut12b ; Gut12a ; CJ12], si les carrés doivent être nécessairement deux à deux distincts, le système *Easyloop* autorise deux carrés non successifs à se confondre ; nous reviendrons sur ce point en section 3.4. D'autre part, dans [Sla11 ; Jen03], deux carrés successifs ne peuvent avoir en commun qu'un côté, contrairement au système *Easyloop*. De plus, des contraintes supplémentaires dues au nombre de pièces disponibles seront à prendre en compte dans le système *Easyloop*. Il faudra ne conserver que les circuits, différents à une isométrie près. Voir section 3.3. Enfin, le nombre de pièces utilisées dans les polygones autoévitant est nécessairement pair ; dans le cas impair, aucun polygone n'existe, ce qui n'est pas le cas des circuits.

Il reste maintenant à définir la géométrie de chacune des courbes  $\Gamma_i$ . Fixons  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Appelons  $\mathcal{H}_i$ , l'ensemble des huit points formés par les quatre milieux et les quatre sommets du carré  $\mathcal{C}_i$ . Pour avoir un nombre élevé de circuits, nous chercherons toutes les courbes possibles correspondant à tous les choix possibles de couples de points distincts  $A_i$  et  $B_i$  dans  $\mathcal{H}_i$ , ce qui représente *a priori*  $C_8^2 = 28$  cas. Cependant, le carré possède un groupe d'isométries  $\mathcal{S}$  le laissant invariant de cardinal 8, ce qui réduit à 6 le nombre de courbes possibles. On définit 6 type de courbes de la façon suivante :

- un premier type regroupant uniquement les courbes pour lesquelles les points  $A_i$  et  $B_i$  sont les milieux de deux côtés opposés du carré,

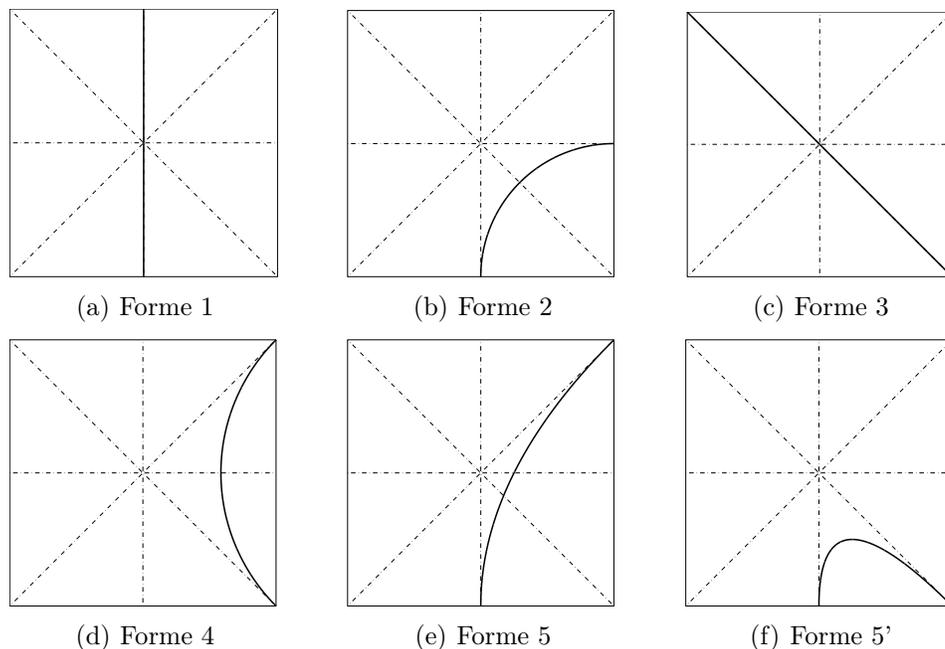


FIGURE 1. Les six formes de base.

- un deuxième type regroupant uniquement les courbes pour lesquelles les points  $A_i$  et  $B_i$  sont les milieux de deux côtés adjacents du carré,
- un troisième type regroupant uniquement les courbes pour lesquelles les points  $A_i$  et  $B_i$  sont deux sommets diagonalement opposés du carré,
- un quatrième type regroupant uniquement les courbes pour lesquelles les points  $A_i$  et  $B_i$  sont deux sommets immédiatement consécutifs du carré,
- un cinquième type regroupant uniquement les courbes pour lesquelles les points  $A_i$  et  $B_i$  sont un milieu d'un côté et un sommet du côté opposé du carré,
- un sixième type regroupant uniquement les courbes pour lesquelles les points  $A_i$  et  $B_i$  sont un milieu d'un côté et un sommet du même côté du carré.

De telles contraintes ne définissent pas encore totalement les courbes, mais nous les cherchons maintenant dans l'ensemble des segments de droites ou des arcs de cercle, comme dans le monde du jouet. Sur la figure 1, les six types de courbes ont été présentés. Les premier et troisième types contiennent uniquement des segments de droites de longueurs respectives 1 et  $\sqrt{2}$  (figures 1(a) et 1(c)). Les deuxième et quatrième types contiennent uniquement des quarts de cercles, de rayons respectifs  $1/2$  et  $\sqrt{2}/2$  (figures 1(b) et 1(d)). Enfin, pour les deux derniers types, il n'existe pas d'arc de cercle. On cherche donc une solution par exemple sous la forme d'une parabole définie par deux points  $A_i$  et  $B_i$  et les deux tangentes associées. On peut, soit déterminer l'unique parabole ainsi définie, soit, ce qui revient au même, déterminer l'unique courbe de Bézier de degré deux, qui est alors définie par les points de contrôle suivants : le point  $A_i$ , le centre du carré  $c_i$  et le point  $B_i$  (figures 1(e) et 1(f)). On pourra consulter [FHK02 ; HM13 ; Per ; LH97 ; Bas15b].

Si fait opérer le groupe des 8 isométries  $\mathcal{S}$  sur les 6 courbes de la figure 1, on obtient bien les 28 courbes possibles de la figure 2(b). Le sixième type de la figure 1(f) sera éliminé par la suite, puisque la pièce correspondante possède un rayon de courbure minimal trop petit pour que des véhicules

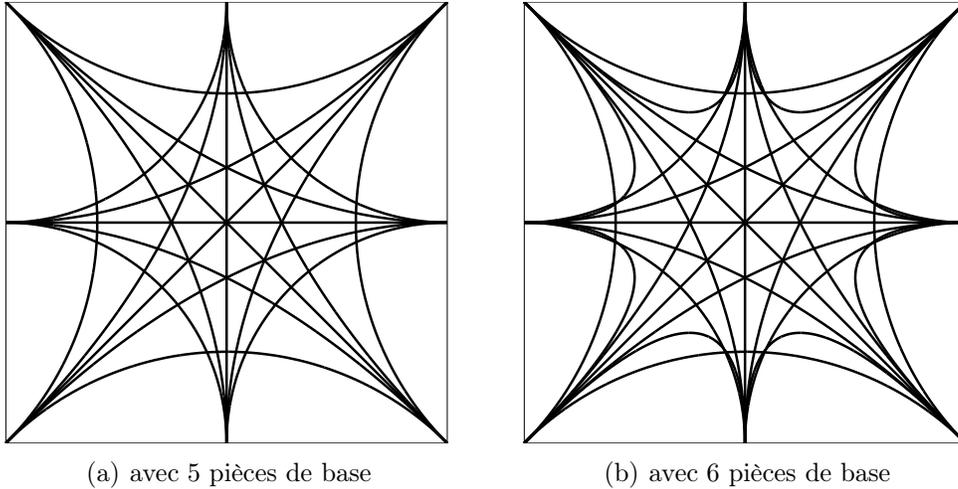


FIGURE 2. Ensemble des trajets possibles.

miniatures puissent y rouler (voir section 2.2), ce qui réduit à 20 le nombre de trajets possibles (voir la figure 2(a)). Dans ce cas, la règle « toute courbe relie deux points distincts quelconques de  $\mathcal{H}_i$  » est à remplacer par « toute courbe relie deux points quelconques distincts et non voisins de  $\mathcal{H}_i$  », ce qui, on le verra par la suite, offre tout de même un grand nombre de circuits.

La courbe  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  ; en effet, chacune des courbes  $\Gamma_i$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . En outre, la réunion de toutes ces courbes sera de classe  $\mathcal{C}^1$  ; par construction, en effet, aux points de raccordement, qui ne peuvent être que des sommets ou des milieux des côtés de carrés, les courbes sont continues (puisqu'elles passent par les mêmes points de début et de fin) et à dérivée continue, puisque les tangentes coïncident.

Les courbes  $\Gamma$  obtenues sont de classe  $\mathcal{C}^1$  mais non de classe  $\mathcal{C}^2$ , à cause de la discontinuité du rayon de courbure, contrairement aux réseaux réels ferrés et de routes. Notons cependant que cette discontinuité est aussi présente dans les systèmes traditionnels déjà existants, constitués de pièces rectilignes et circulaires, de rayons de courbure différents. Sur le plan mécanique, cela engendre, pour le véhicule miniature qui emprunte ce circuit, une discontinuité de l'accélération normale (à vitesse continue) et de l'angle de braquage des roues. Ces contraintes, importantes pour les véhicules réels, interviennent directement sur le confort du passager et sur l'usure induite des pièces mécaniques, mais ne sont pas prises en compte dans le domaine des jouets. En effet, les masses et les vitesses des véhicules sont très faibles, donc les chocs dus aux discontinuité de l'accélération normale sont négligeables. De plus, la notion de confort du voyageur n'a pas de sens ici. Enfin, les roues des véhicules peuvent subir une discontinuité de l'angle de braquage parce qu'elles présentent un léger jeu par rapport au châssis.

## 2.2. Construction des pièces

Une fois le chemin  $\Gamma$  construit, il reste à définir les différents types de rails constituant le circuit. Chacun des type de rails sera donc défini à partir de l'un des cinq types de courbes précédemment définis.

- Ces courbes constituent la ligne médiane de chacun des types de pièces.
- Les passages des roues sont définis comme deux courbes à distance constante de cette courbe médiane, c'est-à-dire : chaque point de l'une de ces deux courbes se trouve sur une droite

perpendiculaire à la tangente à la ligne médiane à une distance constante de la courbe médiane. Les bords de rails sont définis de la même façon.

- La section transversale de la pièce est définie de façon classique.
- Notons que dans [Bas12], nous avons spécifié que la demi-largeur  $e/2$  du rail devait être inférieure au rayon de courbure de la courbe médiane, pour éviter qu’au point considéré, la courbe construite à égale distance de la courbe médiane, ne présente un point stationnaire avec un changement de sens du vecteur unitaire tangent. Pour la parabole de la figure 1(e), le rayon minimal est égal à  $R_{\min} = 1$ , tandis que pour la parabole de la figure 1(f), le rayon minimal est égal à  $R_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{25}$ . Ainsi, si l’on considère les courbes des figures 1(a) à 1(e), le rayon de courbure minimal est donc égal à

$$R_{\min} = \frac{1}{2},$$

tandis que si l’on considère les courbes des figures 1(a) à 1(f), le rayon de courbure minimal est donc égal à

$$R_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{25}.$$

Dans le premier cas, la largeur  $e$  du rail est donc inférieure strictement à  $e_0$  donné par

$$e_0 = 1, \tag{2}$$

tandis que dans le second cas,  $e_0$  est donné par

$$e_0 = \frac{2\sqrt{5}}{25} \approx 0.17889. \tag{3}$$

Le choix d’une section standard, compatible avec les véhicules miniatures de type Brio ®, correspond à

$$e = 0.18349. \tag{4}$$

Ainsi, pour les courbes des figures 1(a) à 1(e), ce choix de largeur permet d’avoir aucun point stationnaire. En revanche, pour les courbes des figures 1(a) à 1(f), ce choix de largeur fait apparaître un point stationnaire, comme le montre les pièces 7 et 8 de la figure 4.

- Enfin, les connecteurs sont des tenons/mortaises, conçus de telle sorte que chaque rails possède un tenon et une mortaise.

Les pièces de types 1 à 4 sont symétriques : elles possèdent un plan de symétrie perpendiculaire à la courbe médiane, et puisque la section est elle-même symétrique, il suffit donc de construire un seul type de pièces pour ces quatre types. En revanche, la pièce de type 5 n’est pas symétrique et les deux extrémités n’ont donc pas le même rôle. Il a donc fallu construire deux pièces différentes où les prises mâles et femelles sont inversées pour pouvoir réaliser le circuit. Voir la figure 3.

Les extrémités des pièces pouvant être soit des milieux de côté, soit des sommets, il a fallu marquer sur les rails les extrémités correspondant à des sommets, ce qui a été réalisé grâce à une pastille jaune visible sur la figure 3. Cette pastille figure aussi sur tous les plans qui seront présentés dans ce document. L’enfant qui joue à assembler les pièces aura donc cette unique règle à respecter : « n’assembler des pièces entre elles que si les deux extrémités des deux pièces contiguës ont la même nature (absence ou présence simultanée de pastilles) ». Cette règle est la seule règle à respecter pour pouvoir faire des circuits qui se rebouclent bien !



FIGURE 3. Les deux pièces correspondant à la ligne médiane de type 5.

Enfin des prototypes ont été fabriqués, du type de ceux de la figure 3. Les carrés théoriques présentés de côté donnés par (1), ont tous été multipliés par une longueur de référence donnée par

$$L = 21.8 \text{ cm}, \quad (5)$$

qui est égale au côté du carré de base constituant le pavage réel.

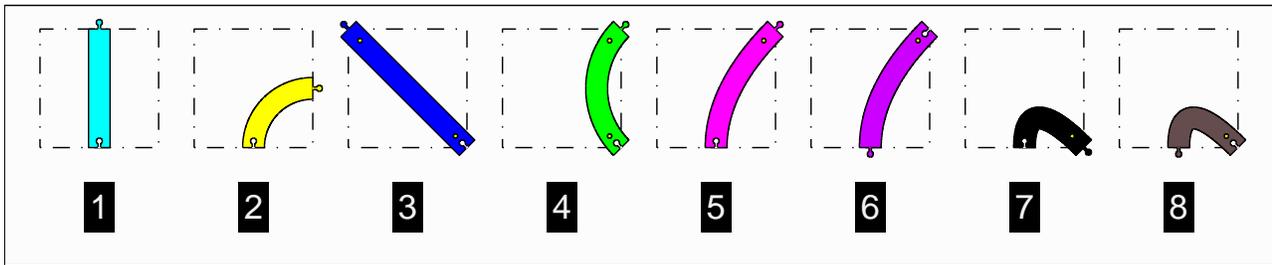


FIGURE 4. La numérotation des pièces.

Les pièces sont désormais numérotées comme l'indique la figure 4.

Rappelons que les pièces 7 et 8 présentes en théorie dans le circuit, n'ont pas été réalisées en pratique, puisque trop incurvées. Les calculs présentés par la suite peuvent tout à fait prendre en compte ces deux types de pièces, mais pour simplifier nous supposons désormais par la suite que seuls les six premiers types de pièces sont utilisés. Cependant, les programmes et les algorithmes décrits peuvent éventuellement prévoir la présence de ces deux pièces.

Donnons à titre d'exemple un circuit réellement fabriqué sur les figures 5 et 6.

Sur la figure 7, on a représenté un plan de circuit, vu comme un plan de jeu (figure 7(a)) ou comme un polygone auto-évitant (figure 7(b)), obtenu en reliant les centres  $c_i$ . Dans ce cas, le circuit est un polygone auto-évitant au sens classique du terme.

Sur la figure 8, on a représenté un plan de circuit, vu comme un plan de jeu (figure 8(a)) ou comme un polygone auto-évitant (figure 8(b)). Cette dernière figure met en évidence les différences essentielles qui existent entre nos polygones auto-évitants et ceux de la littérature : les nôtres autorisent des carrés successifs à avoir un commun un sommet et deux carrés différents peuvent être occupés par deux portions différentes de trajectoires.



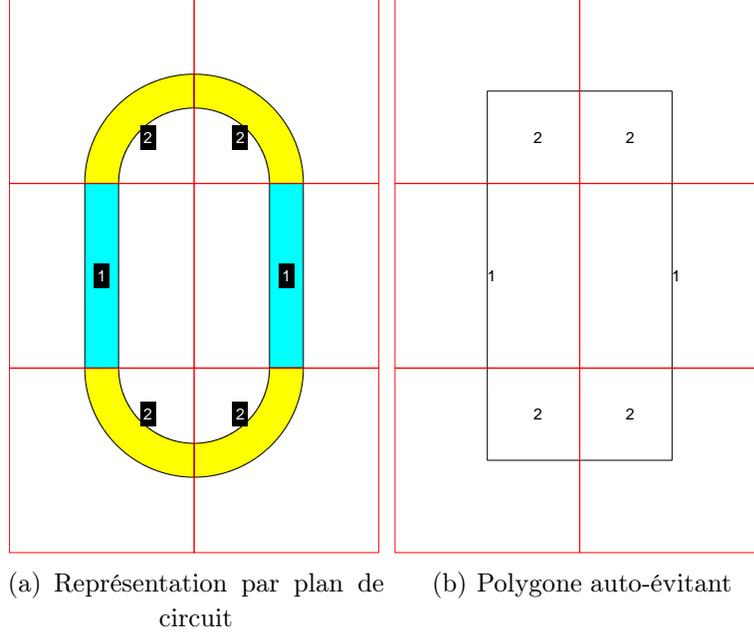


FIGURE 7. Un exemple de circuit.

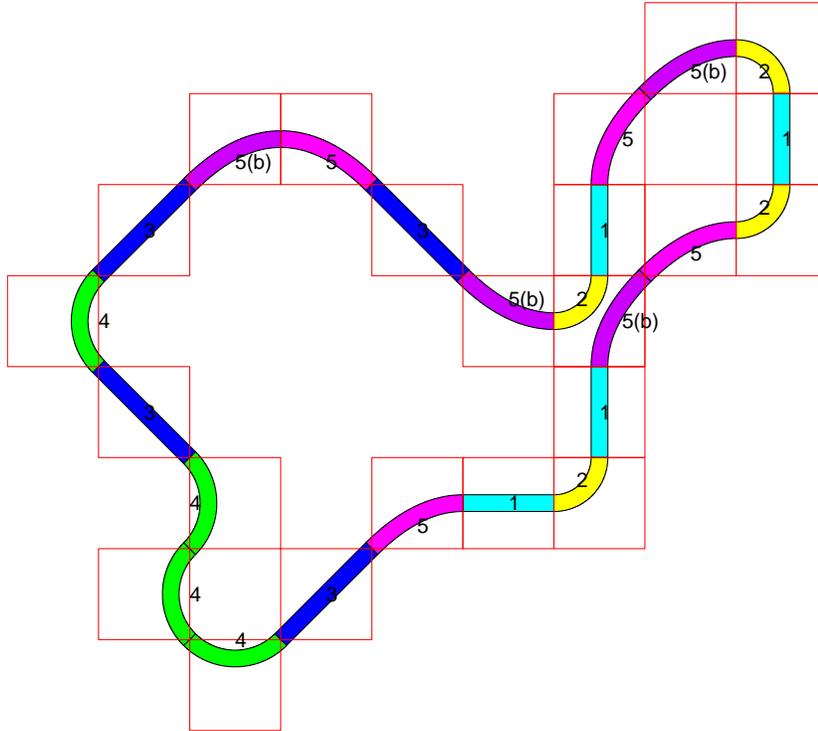
les nombres de pièces 1 à 6 disponibles et  $N$  le nombre total de pièces utilisées et on cherche tous les circuits qui se referment contenant en tout exactement  $N$  pièces et tels que, pour chaque type de pièce, le nombre de pièces utilisées soit inférieur à  $N_j$ . Nécessairement, on a

$$N \leq \sum_{j=1}^6 N_j. \quad (6)$$

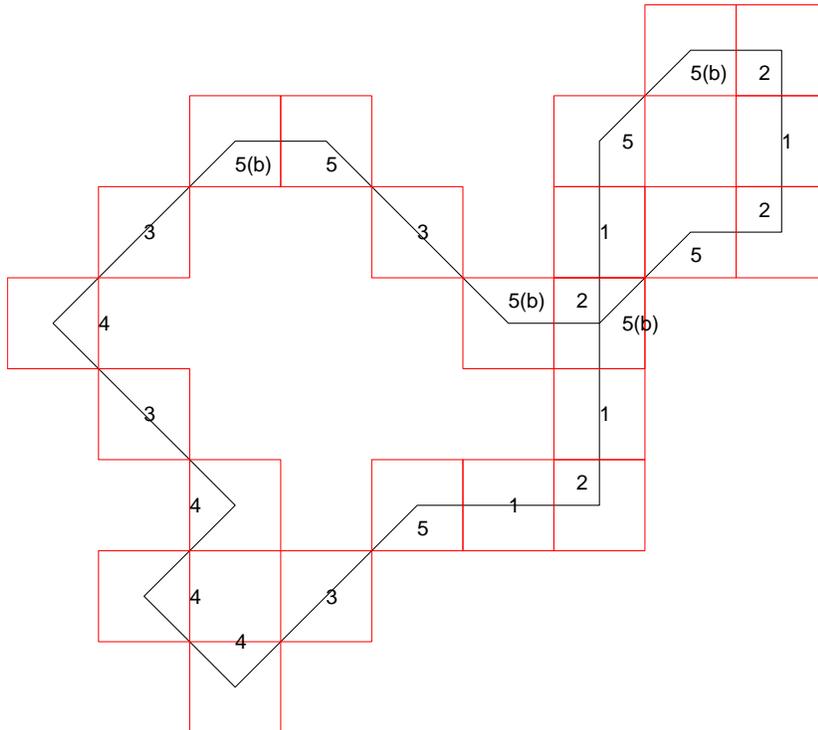
Le cas  $N_j = +\infty$  correspond au cas où le type de pièces concerné n'est *a priori* pas limité. Cependant, le nombre de pièces de ce type est nécessairement inférieur à  $N$ .

Un circuit est totalement déterminé par les  $N$  centres  $(c_i)_{1 \leq i \leq N}$  des carrés. Ces centres étant donnés, il est donc possible, en prenant les milieux de deux centres successifs, de déterminer, pour chaque carré, les coordonnées des points  $A_i$  et  $B_i$ , qui correspondent au début et au fin de la courbe  $\Gamma_i$  dans le carré  $\mathcal{C}_i$ . Le fait de considérer des tenons/mortaises oriente le circuit et il est nécessaire de considérer cette orientation pour les pièces 5 et 6. Choisissons une orientation des tenons/mortaises (ce qui revient à orienter le circuit) de la façon suivante : si l'on parcourt le circuit dans l'ordre croissant des indices de carrés, 1, 2, ...,  $N$ , alors dans chaque carré, la première extrémité de la pièce correspond à une prise femelle, la seconde correspondant à une prise mâle. Notons  $p_i \in \{1, \dots, 6\}$ , le type de la pièce concernée dans le carré  $\mathcal{C}_i$ . On notera respectivement  $A_i$  et  $B_i$  (éléments de  $\mathcal{H}_i$ ), le début de la courbe  $\Gamma_i$ , correspondant à la prise femelle et la fin de la courbe  $\Gamma_i$ , correspondant donc à la prise mâle. Le numéro  $p_i$  dépend donc uniquement des points  $A_i$  et  $B_i$ . Par exemple, si ces deux points sont deux sommets successifs, la pièce est de type 4.

Une autre façon de voir cela est de remarquer que chaque pièce est totalement déterminée par la position relative du carré contenant la pièce précédente et de celui contenant la pièce suivante ainsi que la nature des points  $A_i$  et  $B_i$  (c'est-à-dire, être un sommet ou un milieu). À cet effet, pour



(a) Représentation par plan de circuit



(b) Polygone auto-évitant

FIGURE 8. Un exemple de circuit.

$i \in \{2, \dots, N - 1\}$ , considérons l'angle

$$\alpha_i = (\overrightarrow{c_{i-1}c_i}, \overrightarrow{c_i c_{i+1}}) \in [0, 2\pi[. \tag{7}$$

Voir la figure 9. Si on pose

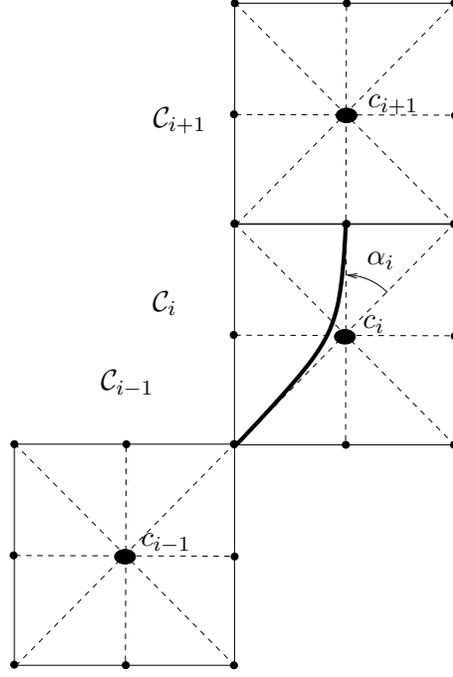


FIGURE 9. Chaque pièce est définie par les deux carrés la limitant et le carré auquel elle appartient.

$$\forall i \in \{2, \dots, N - 1\}, \quad \alpha_i = \frac{k_i \pi}{4}, \tag{8}$$

les seules valeurs possibles de  $k_i$  décrivent l'ensemble  $\{0, 1, 2, 6, 7\}$ . Les relations entre ces éléments

$A_i$	$B_i$	$k_i$	type de pièce
milieu	milieu	0	1
milieu	milieu	2 ou 6	2
sommet	sommet	0	3
sommet	sommet	2 ou 6	4
milieu	sommet	1 ou 7	5
sommet	milieu	1 ou 7	6

TABLE 1. Numéros  $p_i$  des pièces en fonction de  $A_i$ ,  $B_i$  et  $k_i$

sont donnés dans le tableau 1. Sur la figure 9, l'exemple montre le cas d'une pièce correspondant à  $k_i = 1$ , donc de type 6.

*Remarque 3.1.* Dans le cas où  $k_i \neq 0$ , la valeur de  $k_i$  permet de déterminer le sens du virage de la pièce en question (droite ou gauche). Pour  $k_i = 1$  ou  $k_i = 2$ , la pièce tourne vers la gauche et pour  $k_i = 6$  ou  $k_i = 7$ , elle tourne vers la droite. On peut donc aussi adjoindre un signe aux numéros des pièces non rectilignes. Seule la valeur absolue est importante pour le comptage des différents types de pièces, mais nous verrons plus loin qu'il peut être nécessaire de conserver ce signe pour orienter le sens dans lequel tourne cette pièce.

### 3.2. Description de tous les circuits

Dans un premier temps, décrivons la recherche de tous les circuits à  $N$  pièces dont le centre du premier carré est arbitrairement égal à l'origine et le centre du dernier est donné par  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ .

Le deuxième carré, nécessairement voisin immédiat de l'origine, peut être donc choisi parmi 8 carrés possibles. Pour chacun de ces choix, on peut choisir librement les valeurs de  $k_i$ ,  $2 \leq i \leq N - 1$  dans  $\{0, 1, 2, 6, 7\}$ , ce qui fixe les valeurs de  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , ainsi que les valeurs des angles  $\alpha_i$ ,  $2 \leq i \leq N - 1$ . On se donne, de plus, le premier point  $A_1$  de la première courbe (dans  $\mathcal{H}_1$ ) et le dernier point  $B_N$  de la première courbe (dans  $\mathcal{H}_N$ ). Le point  $B_2$  est connu ; on en déduit le numéro de pièce  $p_1$ . De même,  $p_N$  est connu. Pour tout  $i$ ,  $2 \leq i \leq N - 1$ , les natures de tous les points  $A_i$  et  $B_i$  et la valeur de  $k_i$  sont connues, dont on déduit la valeur de  $p_i$ , grâce au tableau 1. Sur tous les circuits ainsi définis, on ne conservera que ceux correspondant à  $c_N = (x, y)$ .

Ainsi, en faisant varier un certain nombre de paramètres indépendants, on est capable d'énumérer tous les circuits, de façon géométrique (détermination des  $c_i$ ) et constitutive (détermination des  $p_i$ ) allant de l'origine à un point donné.

Si l'on cherche maintenant tous les circuits qui se rebouclent, on considérera de même que le centre du premier carré est arbitrairement égal à l'origine. Le dernier carré  $c_N$  ne pourra être qu'un des 8 voisins du premier. Par symétrie et rotation, on pourra se contenter de choisir  $c_N \in \{(1, 0), (1, 1)\}$ . Pour chacun des choix de  $c_N$ , on applique ce que l'on a vu précédemment pour déterminer tous les circuits allant de l'origine à  $c_N$ . Dans ce cas, les sommets  $A_1$  et  $B_N$  sont nécessairement connus et égaux, puisqu'ils seront nécessairement le sommet ou le milieu commun du premier et du dernier carré. Notons qu'on peut poser, de façon analogue à (7) et (8),

$$\alpha_1 = (\widehat{c_N c_1}, \widehat{c_1 c_2}) \in [0, 2\pi[, \quad (9a)$$

$$\alpha_N = (\widehat{c_{N-1} c_N}, \widehat{c_N c_1}) \in [0, 2\pi[, \quad (9b)$$

et

$$\forall i \in \{1, N\}, \quad \alpha_i = \frac{k_i \pi}{4}. \quad (10)$$

Nous conserverons uniquement les circuits tels que  $k_1$  et  $k_N$  appartiennent à l'ensemble  $\{0, 1, 2, 6, 7\}$ . On en déduit ainsi la valeur des  $N$  entiers  $(p_i)_{1 \leq i \leq N}$ . Enfin, sur tous ces circuits, on ne conservera que ceux dont le nombre total de chaque pièce de chaque type est inférieur à  $N_j$ .

Cette méthode, fondée sur un balayage de paramètres, obtenus comme produit cartésien d'ensembles finis, est très coûteuse en temps et est vite limitée pour des valeurs de  $N$  trop grandes (nous reviendrons sur ce point en section 3.6). Dans [Jen04a ; Sla11 ; Jen03 ; JG99 ; Gut12b ; Gut12a ; CJ12], il existe des techniques beaucoup plus subtiles et parallélisables pour dénombrer tous les chemins ou les polygones autoévitant. Cependant, nous avons déjà signalé dans l'introduction, les différences essentielles entre nos circuits et les chemins ou polygones autoévitant, ce qui peut rendre l'utilisation des méthodes de [Jen04a] inopérante ici. De plus, les trajets géométriques de ces circuits se doivent

d'être déterminés pour vérifier la contrainte portant sur les  $N_j$ . Ces circuits devront aussi subir des éliminations pour prendre en compte la répétition de circuits isométriques (voir section 3.3) ainsi que la vérification d'une contrainte locale, qui n'est pas celle des chemins ou polygones autoévitant (voir section 3.4). Enfin, il nous semble important, outre de compter tous les circuits, d'en présenter aussi la totalité, pour les petites valeurs de  $N$  tout du moins.

### 3.3. Prise en compte des isométries

Commençons par étudier un exemple simple. On choisira une petite valeur de  $N$  sans se soucier des contraintes imposées par  $N_j$ .

**Exemple 3.2.** Si on trace tous les circuits réalisables avec  $N = 5$  pièces et  $N_j = +\infty$ , on obtient les 10 circuits de la figure 10. Sur cette figure, on peut voir en fait se répéter deux circuits différents plusieurs fois. Dans chacun des deux ensembles de circuits, on retrouve le même circuit à une isométrie directe près. Deux circuits sont isométriques (cette isométrie étant directe) si et seulement si ils possèdent tous les deux les mêmes numéros signés (voir remarque 3.1) de pièces, à une permutation circulaire près et au sens de parcours près. Notons que la nombre total de circuits examinés est égal à 2000.

Si on ne retient que ceux qui sont différents, à une isométrie directe près, on obtient les 2 circuits de la figure 11. Sur cette figure, on constate que le premier circuit est l'image du second par une isométrie indirecte. Les numéros des pièces sont identiques, à une permutation circulaire près et au sens de parcours près ; de plus, pour prendre en compte cette isométrie indirecte, il est nécessaire de remplacer les numéros signés de pièces non rectilignes par leurs opposés.

Si on ne retient ceux qui sont différents, à une isométrie près, on obtient l'unique circuit de la figure 12.

De façon plus générale, on tracera tous les circuits obtenus, pour  $N$  et  $N_j$  donnés.

Une prise en compte des isométries directes se traduira par la comparaison de tous les circuits obtenus. Si deux d'entre eux possèdent les mêmes numéros signés de pièces, à une permutation circulaire près, l'un des deux sera éliminé.

Dans un second temps, une prise en compte des isométries indirectes sera effectuée. De même, si deux circuits possèdent des mêmes numéros signés de pièces qui sont opposés (pour les pièces non rectilignes), à une permutation circulaire près, l'un des deux sera éliminé. Pour prendre en compte toutes les isométries indirectes, il sera aussi nécessaire d'éliminer les circuits en comparant aussi les indices avec des permutations du type  $N, N - 1, \dots, 2, 1$ , ce qui revient à considérer que l'on parcourt le circuit dans le sens opposé. Dans ce cas, on remplacera les numéros signés de pièces  $\pm 5$  par  $\mp 6$  et vice-versa. Les deux pièces 5 et 6 sont en effet identiques ; seule l'orientation change. Cette élimination sera légitime si les nombres de pièces disponibles de types 5 et 6 sont identiques, ce qui sera toujours vrai par la suite (voir remarque 3.3).

*Remarque 3.3.* Dans le cas des traditionnels polygones autoévitant, le nombre de carrés est nécessairement pair, ce qui n'est plus vrai ici. Néanmoins, on peut affirmer que, dans tout circuit, les nombres de pièces de types 5 et 6 sont égaux. En effet, remarquons que, d'après le tableau 1,

- les pièces de type 1, 2, 3 et 4 relient entre eux deux points de même nature (milieux de côtés ou sommets de carrés) ;
- les pièces de type 5 relient un milieu à un sommet (dans cet ordre) ;
- les pièces de type 6 relient un sommet à un milieu (dans cet ordre) ;

Un circuit part d'un point et revient au même point. Tous les points du circuits, correspondant aux extrémités des pièces utilisées sont soit des sommets, soit des milieux. Il en découle qu'il y a autant de pièces reliant un milieu à un sommet (dans cet ordre) que de pièce reliant un sommet à un milieu (dans cet ordre). Sinon, le point de départ ne serait être de même nature que celui d'arrivée.

*Remarque 3.4.* Notons que, dans le dénombrement des traditionnels polygones autoévitant, seules les translations sont prises en compte dans les isométries. Notre problème de dénombrement est donc bien différent de celui de la littérature. Dans les cas où les deux notions coïncident, cela implique que les configurations que l'on obtiendra seront *a priori* moins nombreuses que celles de la littérature.

### 3.4. Prise en compte des contraintes locales de constructibilité

Dans la recherche des chemins et des polygones autoévitant, une contrainte locale supplémentaire très importante est considérée : les carrés doivent être deux à deux distincts. Ici, cette contrainte n'est pas imposée, puisque seul compte le fait de pouvoir réaliser des circuits constructibles avec les pièces réelles. Ces contraintes ne se manifestent pas sur l'exemple 3.2 puisque le petit nombre de pièces considéré ne fournit pas de circuits inconstructibles, mais ces contraintes interviendront dans de plus gros circuits, donnés en exemple plus bas.

Tout d'abord, il est nécessaire qu'hormis chacun des couples de pièces contiguës, qui ont donc une unique extrémité en commun, aucune des pièces n'ait d'extrémité en commun avec d'autres pièces qui ne soient pas contiguës. Si cette extrémité est un sommet, ce critère est facile à écrire et n'est pas détaillé ici. Si cette extrémité est un milieu et si deux pièces non contiguës ont cette extrémité en commun, elles appartiennent nécessairement au même carré, cas que l'on étudie maintenant.

Deux pièces peuvent appartenir au même carré à condition d'être disjointes (ou d'être à bords tangents).

On se donne donc deux pièces dans le même carré  $\mathcal{C}_i$  dont on veut vérifier qu'elles sont disjointes. Plusieurs cas se présentent :

- (1) Elles ont en commun au moins une extrémité : dans ce cas, elles ne sont pas disjointes.
- (2) Leurs extrémités sont deux à deux distinctes.
  - (a) Notons  $P_1 = A_i$  et  $P_2 = B_i$  (resp.  $P'_1$  et  $P'_2$ ) les extrémités de la première (resp. seconde) pièce. Les deux points  $P_1$  et  $P_2$  appartiennent à la frontière  $\partial\mathcal{C}_i$  du carré ; ils définissent donc deux composantes connexes (pour la topologie induite) notée  $\mathcal{P}_a$  et  $\mathcal{P}_b$ . Si

$$(P'_1 \in \mathcal{P}_a \text{ et } P'_2 \in \mathcal{P}_b) \text{ ou } (P'_2 \in \mathcal{P}_a \text{ et } P'_1 \in \mathcal{P}_b), \quad (11)$$

alors les deux sommets de la seconde pièce sont de part et d'autre de la ligne médiane de la première pièce et par continuité des lignes médianes, elles ont un point en commun et, nécessairement, dans ce cas, les deux pièces ne sont pas disjointes. Réciproquement, si (11) n'a pas lieu, on peut montrer que les lignes médianes sont nécessairement disjointes (voir cas 2b).

Précisons tout cela : repérons chacune des extrémités  $P_1$  et  $P_2$  de la première pièce par deux entiers  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  appartenant à  $\{0, \dots, 7\}$  de la façon suivante : si  $\vec{I}$  désigne le premier vecteur de la base orthonormée choisie et  $c_i$  est le centre du carré alors

$$\left(\vec{I}, \widehat{c_i P_1}\right) = \frac{\kappa_1 \pi}{4}, \quad \left(\vec{I}, \widehat{c_i P_2}\right) = \frac{\kappa_2 \pi}{4}.$$

On définit de même  $\kappa'_1$  et  $\kappa'_2$  pour la seconde pièce. L'ensemble  $\{0, \dots, 7\}$  peut être partitionné de la façon suivante :  $\{0, \dots, 7\} = K_a \cup K_b \cup \{\kappa_1\} \cup \{\kappa_2\}$ , de telle sorte que tous les sommets correspondant aux indices de  $K_a$  (resp.  $K_b$ ) soient successifs dans le carré. La propriété (11) est équivalente à

$$(\kappa'_1 \in K_a \text{ et } \kappa'_2 \in K_b) \text{ ou } (\kappa'_2 \in K_a \text{ et } \kappa'_1 \in K_b). \quad (12)$$

Si elle a lieu, les deux pièces ne sont donc pas disjointes. Voir par exemple les figure 13(a) et 14(a) qui illustrent ce cas.

- (b) Supposons maintenant que (12) n'ait pas lieu. Dans ce cas,  $\kappa'_1$  et  $\kappa'_2$  appartiennent tous les deux soit à  $K_a$  soit à  $K_b$ . Si aucune des pièces n'est rectiligne, le cardinal de  $K_a$  et  $K_b$  est nécessairement dans  $\{1, 2\}$  ou dans  $\{4, 5\}$ . Ainsi,  $\kappa'_1$  et  $\kappa'_2$  ne peuvent appartenir au plus petit ensemble et on est nécessairement dans le cas où l'ensemble des sommets compris entre les deux extrémités de la première pièce et l'ensemble des sommets compris entre les deux extrémités de la seconde pièce sont disjointes. Voir par exemple la figure 13(b) qui illustre ce cas. Une courbe de Bézier est nécessairement incluse dans le polygone de contrôle  $A_i c_i B_i$ . Il en est de même pour les lignes médianes des pièces circulaires. Ainsi, dans ce cas, chacune des courbes médiane est incluse dans deux triangles qui n'ont en commun que le centre  $c_i$  du carré, par lequel ne passe aucune des lignes médiane (puisque les lignes médianes rectilignes ne sont pas prises en compte). Ce raisonnement est encore valable si l'une des lignes médianes est rectiligne. Bref, dans ce cas, les lignes médianes des deux pièces sont disjointes.

Il ressort de tout cela que, si les deux pièces étudiées sont confondues, on est dans le cas 1. Sinon, on est soit dans les cas 1 ou 2a, auxquels cas les pièces ne sont pas disjointes. Enfin, si on est dans le dernier cas 2b, les lignes médianes des deux pièces sont disjointes. Dans ce cas, si on note  $\Gamma_i$  et  $\Gamma'_i$  les deux courbes (qui sont dans le même carré), on peut considérer

$$\delta = \sqrt{\inf_{(M, M') \in \Gamma_i \times \Gamma'_i} d^2(M, M')}, \quad (13)$$

où  $d(M, M')$  est la distance euclidienne entre les points  $M$  et  $M'$ . Le couple  $(M, M')$  décrit une partie compacte de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  et  $d$  est continue ; cette borne inférieure existe et est nécessairement atteinte en un couple de points  $(M_0, M'_0)$  de  $\Gamma_i \times \Gamma'_i$ . Puisque les deux courbes  $\Gamma_i$  et  $\Gamma'_i$  sont disjointes, le nombre  $\delta$  est nécessairement strictement positif. Par ailleurs, on peut montrer que pour tous les couples de courbes  $\Gamma_i \times \Gamma'_i$  qui sont dans ce cas, ce réel  $\delta$  est nécessairement atteint en un couple de points qui ne peut être au bord du carré. Dans ce cas, puisque  $(M, M') \mapsto d^2(M, M')$  est une fonction différentiable, sa différentielle y est nulle, ce qui se traduit par la perpendicularité de la droite  $(M_0 M'_0)$  avec la tangente à la courbe  $\Gamma_i$  (resp.  $\Gamma'_i$ ) au point  $M_0$  (resp.  $M'_0$ ).

Informatiquement, toutes ces propriétés ont été vérifiées en faisant un balayage sur tous les couples possibles de courbes  $\Gamma_i \times \Gamma'_i$ , ce qui représente 1600 cas à étudier. Nous avons déterminé le couple de courbes qui correspond à la plus petite distance  $\delta$  possible, donnée par (dans le cas d'un carré de longueur unité) :

$$\delta_{\min} = 0.20711, \quad (14)$$

qui correspond à la configuration de la figure 14(b). Cette expression est égale à

$$\delta_{\min} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{2} - 1 \right). \quad (15)$$

Par construction des bords et par les propriétés de perpendicularité vues, à distance constante égale à la demi-largeur  $e/2$  du rail, deux rails seront disjoints si et seulement si

$$\delta_{\min} \geq e. \quad (16)$$

Le cas  $\delta_{\min} = e$  correspond au cas où les bords des deux rails sont tangents et est encore acceptable<sup>1</sup>. Le choix d'une section standard, compatible avec les véhicules miniatures de type Brio ®, correspond à  $e$  donné par (4). On vérifie donc que (16) a lieu, ce qui signifie, qu'avec le choix de section fait, tous les couples de courbes qui ne sont pas dans le cas où les lignes médianes se coupent nécessairement (cas 1 ou 2a) donnent des situations où les deux pièces sont disjointes (comme dans le cas indiqué par la figure 14(b)). Notons que dans le cas où la plus petite distance est atteinte, la distance la plus petite entre les deux bords est donnée par  $\delta_{\min} - e \geq 0$ , ce qui numériquement donne (en multipliant par la longueur de référence donnée par (5)) :

$$\xi = (\delta_{\min} - e)L = 0.51493 \text{ cm},$$

ce qui est très peu, finalement, eu égard à la valeur donnée par (5) !

Par récursivité, le cas de plusieurs pièces appartenant au même carré a été aussi implémenté. Notons que, pour les valeurs de  $N$  utilisées dans cet article, il n'existe pas de carré contenant plus de trois pièces.

Dans le brevet [Bas12; Bas13], la prise en compte d'aiguillages, de ponts, de croisements a été prévue ; il suffit que ces éléments soient aussi inclus dans des carrés et vérifient les principes de construction. Dans un premier temps, seules des pièces planes et simples (sans aiguillages ni croisements) ont été réalisées. Pour des circuits comprenant d'autres éléments que ceux-là, cette étude de contraintes locales serait donc à reconsidérer. Voir section 6.2.

Concluons par deux exemples montrant des circuits inconstructibles ou constructibles, mis en évidence informatiquement.

**Exemple 3.5.** Sur la figure 15(a), on a choisi trois exemples de pièces non disjointes, couvrant les trois cas vus. Au contraire, en figure 15(b), le circuit est constructible avec trois carrés dans lesquels apparaissent à chaque fois deux pièces disjointes.

### 3.5. Définition adoptée

**Définition 3.6** (chemin autobouclant). On appellera un chemin autobouclant, un chemin  $\Gamma$  de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^2$ , défini comme en section 2.1. Ce chemin est défini à une isométrie près, à une permutation circulaire près et à un sens de parcours près. Par abus de langage, nous appellerons aussi chemin autobouclant, ce qui permet de définir le chemin  $\Gamma$ , c'est-à-dire, respectivement :

- la suite des centres des carrés  $(c_i)_{1 \leq i \leq N}$  occupés par le chemin  $\Gamma$ , vérifiant toutes les contraintes données dans les sections 3.2, 3.3 et 3.4, cette suite étant définie à une isométrie près, à une permutation circulaire près et à un sens de parcours près ;
- la suite des angles  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq N}$  définis en sections 3.1 et 3.2, cette suite étant définie, à une multiplication par  $-1$  près, à une permutation circulaire près et à un sens de parcours près ;
- la suite des numéros signés de pièces  $(p_i)_{1 \leq i \leq N}$  définis en section 3.1, cette suite étant définie au changement  $\pm 5$  par  $\mp 6$  et vice-versa près, à une permutation circulaire près et à un sens de parcours près.

---

1. Si la conception des pièces est parfaite, car aucune imperfection n'est dans ce cas autorisée. En pratique, on préférera donc choisir par sécurité  $\delta_{\min} > e$ .

Notons aussi qu'un chemin autobouclant dépend des  $N_j$  et de la largeur  $e$  qui, dans tout cet article est choisie inférieure à la largeur critique égale au maximum de  $e_0$  définie par (2) et de  $\delta_{\min}$  défini par (14) et (15). Dans le cas légèrement différent où  $e > e_0$ ,  $e$  doit rester inférieur à  $1/2$ ; dans ce dernier cas, les règles de connexion, donnée en section 3.4, sont à modifier, ce qui est aussi pris en compte dans les algorithmes utilisés. Si on décide d'adjoindre les pièces de type 7 et 8,  $e_0$  est alors donné par (3).

**Définition 3.7** (circuit). Dans toute la suite de cet article, un circuit est donc l'ensemble des pièces géométriques qui s'appuie sur la construction géométrique d'un chemin autobouclant.

### 3.6. Limitation informatique et complexité des algorithmes

Dans [Jen04a], le nombre de chemins autoévitant a pu être déterminé de façon exacte jusqu'à  $N = 71$ ; l'auteur obtient 4 190 893 020 903 935 054 619 120 005 916 chemins! Dans [CJ12], le nombre de polygones autoévitant a pu être déterminé de façon exacte jusqu'à  $N = 130$ ; l'auteur obtient 17 076 613 429 289 025 223 970 687 974 244 417 384 681 143 572 320 polygones! Malheureusement, comme signalé plus haut, ces méthodes parallélisables n'ont pas pu être implémentées ici. Tous les algorithmes présentés ont été programmés sous Matlab ®. Deux versions ont été prévues : la première est vectorielle (donc parallélisable) et évite l'usage des boucles, ce qui est relativement rapide. Cependant, les tableaux utilisés sont vite de taille très importante, ainsi que le nombre total de circuits à étudier. Jusqu'à  $N = 9$ , ces calculs sont possibles. Au-delà, la taille mémoire est trop importante. Il faut passer alors à des calculs par boucles, qui sont beaucoup plus longs, mais qui évitent de stocker de grands tableaux correspondant aux circuits possibles. Jusqu'à  $N = 11$ , les calculs sont raisonnables. Au-delà de  $N = 11$ , les calculs n'ont pas été menés.

Les énumérations exhaustives des circuits possibles font appel à des produits cartésiens d'ensembles finis et sont donc de complexité en  $\mathcal{O}(A^N)$ , ce qui, de toute façon, limite en théorie les calculs informatiques.

Dans [Sla11; Jen03; JG99; Gut12b; Gut12a; CJ12], une estimation du nombre de polygones autoévitant est donnée pour  $N \rightarrow +\infty$  :

$$q(N) \sim A\mu^N N^{\gamma-1}, \tag{17}$$

où  $\mu$  est appelée la constante de connectivité,  $\gamma$  l'exposant critique et  $A$  l'amplitude critique. La valeur de  $\mu$  proposée est la même que celle correspondant aux chemins autoévitant (voir [Jen03]) :

$$\mu \approx 2.638. \tag{18a}$$

La valeur de  $\gamma$  correspondant aux réseaux carrés est donné par

$$\gamma - 1 \approx -\frac{5}{2}, \tag{18b}$$

et enfin, on a (voir [Jen03])

$$A \approx 0.0795774715. \tag{19}$$

L'estimation (17) n'est pas utilisable en l'état ici, puisque nous avons vu que la recherche des circuits et des chemins et des polygones autoévitant n'était pas exactement identique; néanmoins, nous utiliserons abusivement cette approximation pour évaluer le nombre de circuits, pour des valeurs plus importantes de  $N$  en section 4.

### 3.7. Quelques exemples d'énumération de circuits

Reprenons quelques exemples similaires à l'exemple 3.2 en donnant les circuits construits aux sens des définitions 3.7 et 3.6.

**Exemple 3.8.** Si on trace quelques uns des circuits réalisables avec  $N = 8$  pièces et  $N_j = +\infty$ , on obtient les 10 circuits de la figure 16. Notons que les figures 16(a), 16(b) et 16(c) correspondent à des circuits où ne sont utilisées que les pièces 1 et 2. Nous reviendrons plus loin sur ces circuits particuliers.

**Exemple 3.9.** Si on trace quelques uns des circuits réalisables avec  $N = 11$  pièces et  $N_j = 4$ , on obtient les 10 circuits de la figure 17.

### 3.8. Comparaison avec les systèmes traditionnels et la théorie classique des polygones autoévitant (pavage carré)

Les systèmes traditionnels, comme *Brio* ® proposent une multitude de forme de rails, qui sont tous circulaires ou droits, mais jamais paraboliques. Naturellement, on ne peut comparer les circuits étudiés avec ces types de systèmes qui ne présentent pas de plans variés extensibles et modulables à volonté. Cependant, dans des tels systèmes existent en particulier des huitièmes de cercles, qui assemblés deux par deux, donnent un quart de cercle, dont le rayon est égal à l'une des longueurs des rails droits. Autrement dit, les pièces des circuits étudiés numéros 1 et 2 utilisées seules<sup>2</sup> permettent de créer des circuits simples qui pourraient être créés avec les systèmes traditionnels. Ces circuits ont des pièces droites qui ne peuvent qu'être perpendiculaires entre elles : les formes sont moins variées et surtout, le nombre de possibilités de circuits offerts est beaucoup moins grand que ceux de notre système (voir sections 3.9 et 4).

Choisissons donc maintenant de montrer un circuit, uniquement formé des pièces 1 et 2. Notons que, dans ce cas, les carrés adjacents ne peuvent avoir en commun qu'un côté et que l'on est très proche du cas des polygones autoévitant, mais des pièces dans le même carré peuvent aussi coexister. Notons aussi que le nombre de pièces utilisées est nécessairement pair exactement comme dans le cas des polygone autoévitant.

#### Exemple 3.10.

On choisit  $N = 8$ ,  $N_j = +\infty$ , si  $j \in \{1, 2\}$  et nul sinon, et on trace tous les circuits réalisables avec  $N = 8$  pièces. On obtient les 4 circuits de la figure 18. Notons que l'on retrouve naturellement quelques-uns des circuits à 8 pièces de l'exemple 3.8 (voir figures 16(a), 16(b) et 16(c)).

#### Exemple 3.11.

Comme dans l'exemple 3.10, on trace tous les circuits réalisables avec  $N = 10$  pièces. On obtient les 7 circuits de la figure 19.

### 3.9. Détermination du nombre de circuits

Dans le tableau 2, ont été donnés les nombres de circuits pour  $N_j = +\infty$  et  $N_j = 4$ . Ce dernier cas correspond aux boîtes distribuées *Easyloop*.

Enfin, dans le tableau 3 les nombres de polygones autoévitant, correspondant à un pavage carré, issu de [MS93, tableau p. 396] ou <http://oeis.org/A002931/b002931.txt> ainsi qu'une comparaison entre les systèmes traditionnels (voir section 3.8) et le système *Easyloop* sont proposés ; pour ces

---

2. On peut aussi considérer les pièces 3 et 4 qui sont homothétiques des pièces 1 et 2 avec un rapport  $\sqrt{2}$ .

$N$	$N_j = +\infty$	$N_j = 4$
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	2	2
5	1	1
6	5	5
7	7	6
8	33	28
9	74	63
10	304	244
11	986	753

TABLE 2. Les nombres de circuits correspondant à  $N_j = +\infty$  et  $N_j = 4$

$N$	Polygones autoévitant	systèmes traditionnels <i>Brio</i>	système <i>Easyloop</i>
4	1	1	2
5	0	0	1
6	2	1	5
7	0	0	6
8	7	4	28
9	0	0	63
10	28	7	244
11	0	0	753

TABLE 3. Les nombres de polygones autoévitants, les nombres (non nuls) de circuits pour les systèmes traditionnels *Brio* et le système *Easyloop*

derniers, seul le nombre de circuits constructibles à une isométrie près, est affiché. Le nombre  $N_j$  est égal à 12 si  $j = 1, 2$  et nul sinon.

Les circuits traditionnels sont très proches des polygones autoévitants, hormis les deux différences suivantes, déjà évoquée plus haut : les isométries autorisées sont toutes les isométries et un carré peut être emprunté plusieurs fois par le circuit. Le point commun est que pour  $N$  impair, le nombre obtenu est nul.

Traçons sous formes de polygones fermés les circuits obtenus dans les exemples 3.10 et 3.11.

Voir les figures respectives 20 et 21.

- Pour  $N = 8$  (voir figure 20), on obtient 4 circuits traditionnels et 7 polygones autoévitants. Comme écrit dans <http://oeis.org/A002931>, les 7 polygones autoévitants correspondent aux 1, 2 et 4 rotations (d'angle  $\pi/2$ ) respectives des circuits des figures 20(a) 20(b) et

- 20(c). Le circuit de la figure 20(d) ne correspond à aucun polygone autoévitant, puisqu'un des carrés est occupé par deux pièces. On a donc bien retrouvé  $7 = 1 + 2 + 4$ .
- Pour  $N = 10$  (voir figure 21), on obtient 7 circuits traditionnels et 28 polygones autoévitants. En effet, les 2 circuits des figures 21(a) et 21(b) fournissent chacun par 2 rotations (d'angle  $\pi/2$ ) 2 polygones autoévitants. Les 2 circuits des figures 21(c) et 21(d) fournissent chacun par 4 rotations (d'angle  $\pi/2$ ) et une réflexion 8 polygones autoévitants. Le circuit de la figure 21(e) fournit par une rotation (d'angle  $\pi/2$ ) et une réflexion, 4 polygones autoévitants.. Le circuit de la figures 21(g), fournit par 4 rotations (d'angle  $\pi/2$ ) 4 polygones autoévitants. Le circuit de la figure 21(f) ne correspond à aucun polygone autoévitant, puisqu'un des carrés est occupé par deux pièces. On a donc bien retrouvé  $28 = 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 4 + 4 + 4$  polygones autoévitants.

#### 4. Estimation du nombre de circuits à nombre de pièces important

Dans le cas où  $N$  est supérieur à 11, les calculs sont trop longs et il n'est pas possible d'utiliser l'énumération et le dénombrement des circuits. Nous utilisons, avec un grand abus, l'estimation donnée par (17), qui provient de [Sla11; Jen03; JG99; Gut12b; Gut12a; CJ12]. Nous allons utiliser les nombres de circuits donnés dans la section 3.9 et nous nous en servirons pour évaluer les valeurs des constantes  $A$ ,  $\mu$  et  $\gamma$  de la formule (17). Cette évaluation est remplacée par une égalité et les coefficients  $A$ ,  $\mu$  et  $\gamma$  sont déterminés grâce à un système aux moindres carrés qui devient linéaire si l'on en prend le logarithme.

	$N_j = +\infty$	$N_j = 4$
$\gamma - 1$	-8.75998	-8.69817
$\mu$	9.13739	8.69023

TABLE 4. Les valeurs de  $\gamma - 1$  et de  $\mu$  obtenues grâce au tableau 2.

Utilisons les différents résultats du tableau 2 pour déterminer les valeurs de  $\gamma - 1$  et de  $\mu$ . Voir tableau 4. Les valeurs obtenues sont différentes naturellement des valeurs données par (18). Cela est normal puisque l'estimation (17) a été remplacée par une égalité et naturellement, rien ne valide *a priori* cette égalité. Notons que les signes de ces coefficients sont cohérents avec ceux de la littérature.

Les valeurs retenues des coefficients  $A$ ,  $\mu$  et  $\gamma - 1$  de la formule (17) dans le cas des boîtes *Easyloop*, correspondant à  $N_j = 4$  correspondent donc à la dernière colonne tableau 4 et sont données par

$$A = 4.5900 \cdot 10^1, \quad \gamma - 1 = -8.69817, \quad \mu = 8.69023. \quad (20)$$

Dans le cas (20), les nombres estimés de circuits sont alors  $\{0, 0, 0, 2, 2, 3, 8, 21, 65, 226, 857\}$  proches des nombres exacts de circuits ( $\{0, 0, 0, 2, 1, 5, 6, 28, 63, 244, 753\}$ ). Pour  $N = 24$ , nous obtenons

$$q(24) \approx 1560511691458. \quad (21)$$

On obtient alors la courba montrée en figure 22.

Pour comparer les circuits *Easyloop* avec les systèmes traditionnels, on obtient de même

$$q(24) \approx 130229, \quad (22)$$

ce qui reste beaucoup plus faible que (21).

## 5. Construction aléatoire de circuits à nombre de pièces important

Nous sommes capables pour les valeurs de  $N$  inférieures à 11, d'obtenir tous les circuits constructibles et en particulier de les exhiber. Un autre objectif d'un industriel serait de proposer un catalogue de plans de circuits de train pouvant contenir des circuits avec  $N$  quelconque. Malheureusement, au delà de  $N = 11$ , cela n'est plus envisageable. Une conception manuelle est possible, mais fastidieuse et non programmable. Nous proposons ainsi dans cette section un moyen de générer automatiquement des circuits pour  $N$  et  $N_j$  donnés pour des valeurs plus grandes que  $N = 11$ , sans avoir à créer tous les circuits possibles, comme proposé en section 3.2, en s'appuyant sur une méthode aléatoire.

Pour  $N \geq 1$  donné, on considère  $r, s \in \mathbb{N}^*$  tels que  $N = r + s$ . On est capable de déterminer tous les circuits à  $r$  pièces partant de l'origine en décrivant un produit cartésien d'ensemble fini. Pour éviter cette longue étape, nous nous contentons de choisir aléatoirement  $q$  circuits en choisissant les paramètres dans ce produit cartésien. Pour chacun de ces circuits, le dernier carré occupé par la dernière pièce, n'est pas nécessairement égal à l'origine. On se donne  $R \in \mathbb{N}^*$  et on ne conserve de ces circuits que ceux pour lesquels la valeur absolue de l'abscisse et de l'ordonnée est inférieure à  $R$ . Pour chacun de ces circuits conservés, on est capable de déterminer tous les circuits à  $s$  pièces partant du dernier carré et retournant à l'origine. On considère donc tous les circuits obtenus par la concaténation des circuits à  $r$  pièces allant de l'origine à un carré quelconque et des circuits à  $s$  pièces retournant à l'origine. Enfin, sur ces circuits, on ne conserve que ceux dont les types des pièces sont inférieurs à  $N_j$ . On applique aussi la sélection des isométries et des contraintes de constructibilités. On a donc obtenu un certain nombre de circuits constructibles à  $N$  pièces, sans avoir eu à construire le produit cartésien des paramètres des circuits déterminant tous les circuits possibles, dont le cardinal est trop important. Naturellement, pour augmenter les chances de réussites, on doit choisir  $r, s, q$  et  $R$  les plus grands possibles. Informatiquement, il ne faut pas que ces nombres soient trop importants. La détermination aléatoire consistera donc à choisir convenablement ces paramètres. On peut créer soi-même de tels circuits en utilisant les exécutoires distribués pour windows, cités page 23.

### Exemple 5.1.

On choisit  $N_j = 4$  et les paramètres suivants

$$r = 12, \quad s = 5, \quad q = 18, \quad R = 8.$$

On obtient le circuit aléatoire à 17 pièces donné en figure 23.

Nous avons obtenu des circuits de façon aléatoire en pouvant prendre des valeurs de  $N$  strictement plus grandes que 11, et, finalement, en un temps beaucoup plus bref.

## 6. Généralisations

### 6.1. Forme des tuiles du pavage

Nous avons vu que pour un pavage carré, le nombre de courbes nécessaires pour relier chaque point de  $\mathcal{H}_i$  à tous les autres points distincts de  $\mathcal{H}_i$  était égal à 5 ou 6, selon que l'on prenne les pièces numérotées 7 et 8 ou non. Ce nombre dépend intrinsèquement du nombre de points de  $\mathcal{H}_i$  et du cardinal du groupe des isométries laissant le carré invariant.

Se pose la question de savoir si la méthode de construction des rails des circuits étudiés peut s'appliquer à d'autres types de pavages que le carré et si l'on est capable de déterminer le nombre de courbes de base, ici égal à 5 ou 6, uniquement à partir du pavage et des points  $\mathcal{H}_i$  considérés. Cette

généralisation est aussi évoquée pour des chemins autoévitant dans [Jen04b], dans un cas plus simple, puisque les circuits ne peuvent passer que par les bords des tuiles constituant le pavage du plan.

Par exemple, on peut considérer des pavages du plan par des triangles équilatéraux, en ne prenant que les 3 milieux des 3 côtés (voir figure 24(a)) ou les 3 milieux et les 3 sommets du triangle (voir figure 24(b)). On impose que la courbe passe par deux points distincts de cet ensemble  $\mathcal{H}_i$ , en étant tangente à la droite reliant ce point avec le centre du triangle. Dans le premier cas, une seule courbe est nécessaire, dans le second, 3 le sont. D'autres solutions peuvent être envisagées avec d'autres types de pavages possibles.

Le nombre de courbes nécessaires peut-il s'exprimer en fonction du polygone de pavage et de la nature des points  $\mathcal{H}_i$ ? L'énumération de circuits, construits sur ces méthodes, semble être de nouveau, un problème ouvert.

## 6.2. Présence d'aiguillages

Restons dans le cas du pavage carré. Comme décrit plus haut, les pièces des circuits ne doivent pas avoir d'extrémités en commun, si la présence d'aiguillages n'est pas prévue. On peut, au contraire, laisser certaines extrémités être en commun à plusieurs pièces, ce qui correspond simplement à autoriser des aiguillages.

Dans ce cas, les circuits orientés peuvent contenir plusieurs boucles, ce qui en fait des graphes orientés dont l'énumération est un problème beaucoup plus ardu, à cause de la multiplicité des types d'aiguillages possibles et donc des types de graphes possibles. Voir la figure 25 qui montre un exemple d'un circuit avec plusieurs aiguillages.

## 7. Conclusion

La question « Est-ce qu'il est possible de dénombrer tous les circuits réalisables à partir d'un nombre de pièces donné? », simple à exprimer est plus difficile à résoudre. Nous y sommes parvenus, dans cet article : l'énumération et la construction de tels circuit sont possibles et ont été implémentées informatiquement jusqu'à  $N = 11$ . Au-delà, une estimation du nombre de circuits possibles a été fournie (voir (21), correspondant au cas  $N_j = 4$  et (22)). Notons que ces nombres correspondent aux nombres de circuits qui contiennent exactement 24 pièces. Si l'on veut dénombrer tous les circuits qui contiennent au plus 24 pièces, il suffit de faire la somme de la dernière colonne du tableau 2, ce qui donne 1102 circuits, puis d'appliquer l'estimation pour  $N$  variant de 12 à 24, avec les paramètres estimés donnés par (20), ce qui donne au total

$$1873804310490, \tag{23}$$

soit un total de plus de

$$\text{un billion de circuits réalisables avec 24 pièces.} \tag{24}$$

De plus, une construction aléatoire de circuit a été proposée permettant d'obtenir des valeurs de  $N$  strictement plus grandes que  $N = 11$ . Des exécutable et un catalogue de circuits sont disponibles sur internet.

Notons enfin, qu'à la main, un circuit correspondant à  $N_j = 4$  contenant exactement le nombre maximum de pièces (24) a pu être créé. Voir figure 26.

Il est intéressant de constater que la traditionnelle théorie des chemins autoévitant correspond presque aux circuits de trains déjà existants (cf. section 3.8) tandis que le jeu breveté correspond à la notion de chemin autobouclant.

Il resterait à améliorer les algorithmes d'énumération de circuits pour obtenir des valeurs de  $N$  plus élevées, dans le cas déterministe, en tentant par exemple d'éviter la très longue énumération de circuits possibles ; est-ce qu'une construction directe des circuits constructibles sans passer par cette énumération est possible ? Une application des techniques parallélisables proposées par G. Slade, I. Jensen, ou A. J. Guttmann pourrait être essayée sur les circuits afin d'augmenter les valeurs de  $N$  pour lesquelles les énumérations de circuits sont exactes.

Il serait intéressant de démontrer si l'estimation (17) est valable, avec un éventuel calcul des constantes  $A$ ,  $\mu$  et  $\gamma$ . La généralisation évoquée en section 6 permettrait de créer d'autres types de circuits, mais aussi d'essayer de comprendre la nature algébrique du système proposé avec des carrés.

## Annexe A. Url des logiciels et catalogues disponibles sur Internet

[http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet\\_rail/MCRInstaller.exe](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/MCRInstaller.exe)  
[http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet\\_rail/creecircuit.exe](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/creecircuit.exe)  
[http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet\\_rail/creecircuitaleat.exe](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/creecircuitaleat.exe)  
[http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet\\_rail/dessinecircuit.exe](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/dessinecircuit.exe)  
[http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet\\_rail/mode\\_emploi\\_rail\\_demo.pdf](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/mode_emploi_rail_demo.pdf)

[http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet\\_rail/catalogue.pdf](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/catalogue.pdf)  
[http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet\\_rail/catalogue\\_exhaustif\\_11rails.pdf](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/catalogue_exhaustif_11rails.pdf)

## Références

- [Bas12] J. BASTIEN. "Circuit apte à guider un véhicule miniature". Brevet FR2990627. UNIVERSITÉ LYON I. Brevet publié sur le site de l'INPI <http://bases-brevets.inpi.fr/fr/document/FR2990627.html?p=6&s=1423127185056&cHash=cfbcd2dad6e2e39808596f86b89117583> Voir aussi [Bas13]. 15 mai 2012.
- [Bas13] J. BASTIEN. "Circuit suitable for guiding a miniature vehicle [Circuit apte à guider un véhicule miniature]". Brevet WO2013171170. UNIVERSITÉ LYON I. Demande internationale publiée en vertu du traité de coopération en matière de brevets (PCT). Voir <http://bases-brevets.inpi.fr/fr/document/WO2013171170.html?p=6&s=1423127405077&cHash=6947975351b6d1cf7dd56d4e749a98bb>. 13 mai 2013.
- [Bas15a] J. BASTIEN. *Comment concevoir un circuit de train miniature qui se reboucle toujours bien ?* Transparents présentés lors du Forum des mathématiques 2015 à l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon, disponibles sur le web : [http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet\\_rail/expose\\_forum\\_2015.pdf](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_forum_2015.pdf). 2015. 73 pages.
- [Bas15b] J. BASTIEN. *Comment concevoir un circuit de train miniature qui se reboucle toujours bien ? – Deux questions d'algèbre et de dénombrement.* Transparents présentés au « séminaire détente » de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique, Lyon, disponibles sur le web : [http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet\\_rail/expose\\_MMI\\_2015.pdf](http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_MMI_2015.pdf). 2015. 80 pages.
- [Bas16] J. BASTIEN. "Construction and enumeration of circuits capable of guiding a miniature vehicle". Dans : *Recreational Mathematics Magazine* 3.6 (2016). Disponible sur <http://rmm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/1163>, pages 5–42. DOI : 10.1515/rmm-2016-0006.
- [CJ12] N. CLISBY et I. JENSEN. "A new transfer-matrix algorithm for exact enumerations : self-avoiding polygons on the square lattice". Dans : *J. Phys. A* 45.11 (2012), pages 115202, 15. DOI : 10.1088/1751-8113/45/11/115202.

- [FHK02] G. FARIN, J. HOSCHEK et M.-S. KIM, éditeurs. *Handbook of computer aided geometric design*. North-Holland, Amsterdam, 2002, pages xxviii+820.
- [Gut12a] A. J. GUTTMANN. *Self-Avoiding Walks and Polygons – An Overview*. 2012. arXiv :1212.3448.
- [Gut12b] A. J. GUTTMANN. “Self-Avoiding Walks and Polygons – An Overview”. Dans : *Asia Pacific Mathematics Newsletter* 2.4 (2012). [http://www.asiapacific-mathnews.com/02/0204/0001\\_0010.pdf](http://www.asiapacific-mathnews.com/02/0204/0001_0010.pdf).
- [HM13] F. HOLWECK et J.-N. MARTIN. *Géométries pour l'ingénieur*. Paris : Ellipses, 2013.
- [Jen03] I. JENSEN. “A parallel algorithm for the enumeration of self-avoiding polygons on the square lattice”. Dans : *J. Phys. A* 36.21 (2003), pages 5731–5745. DOI : 10.1088/0305-4470/36/21/304.
- [Jen04a] I. JENSEN. “Enumeration of self-avoiding walks on the square lattice”. Dans : *J. Phys. A* 37.21 (2004), pages 5503–5524. DOI : 10.1088/0305-4470/37/21/002.
- [Jen04b] I. JENSEN. “Improved lower bounds on the connective constants for two-dimensional self-avoiding walks”. Dans : *J. Phys. A* 37.48 (2004), pages 11521–11529. DOI : 10.1088/0305-4470/37/48/001.
- [JG99] I. JENSEN et A. J. GUTTMANN. “Self-avoiding polygons on the square lattice”. Dans : *J. Phys. A* 32.26 (1999), pages 4867–4876. DOI : 10.1088/0305-4470/32/26/305.
- [LH97] C. LEBOSSE et C. HÉMERY. *Géométrie. Classe de Mathématiques (Programmes de 1945)*. Paris : Jacques Gabay, 1997.
- [MS93] N. MADRAS et G. SLADE. *The self-avoiding walk*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993, pages xiv+425.
- [Per] D. PERRIN. “Les courbes de Bézier”. Notes pour la préparation au CAPES de mathématiques disponibles sur <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/BezierDP.pdf>.
- [Sla11] G. SLADE. “The self-avoiding walk : a brief survey”. Dans : *Surveys in stochastic processes*. EMS Ser. Congr. Rep. Eur. Math. Soc., Zürich, 2011, pages 181–199. DOI : 10.4171/072-1/9.

CENTRE DE RECHERCHE ET D'INNOVATION SUR LE SPORT, U.F.R.S.T.A.P.S., UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD  
- LYON 1, 27-29, BD DU 11 NOVEMBRE 1918, 69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE  
*E-mail address:* jerome.bastien@univ-lyon1.fr

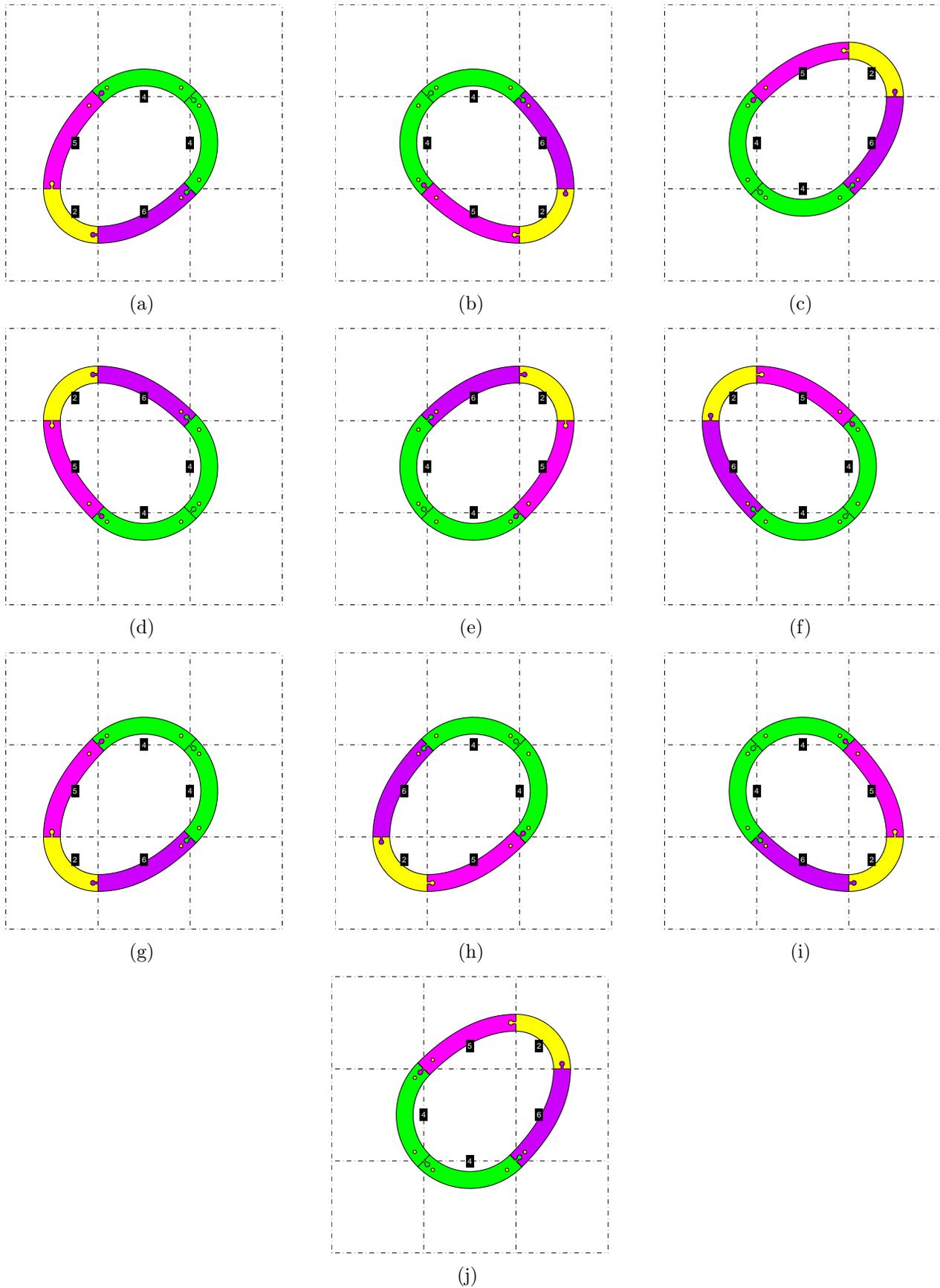


FIGURE 10. Tous les 10 circuits retenus sur l'ensemble des 2000 circuits possibles.

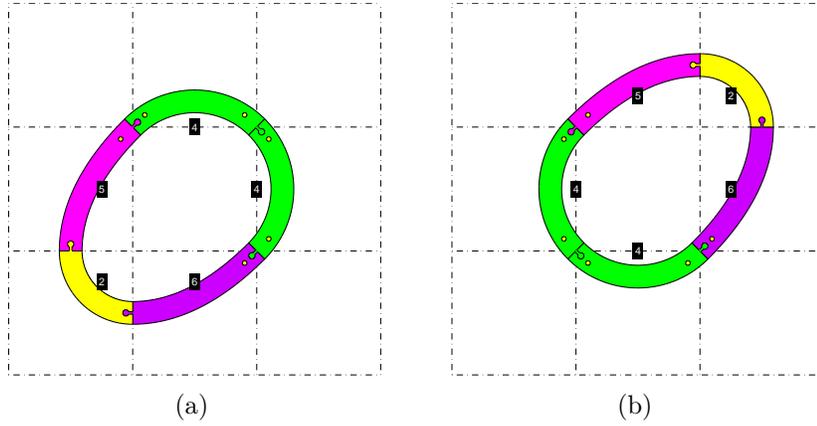


FIGURE 11. Tous les 2 circuits retenus sur l'ensemble des 2000 circuits possibles.

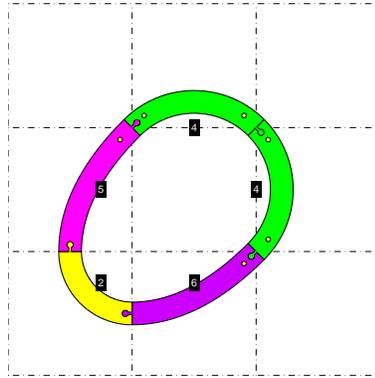


FIGURE 12. Le seul circuit retenu sur l'ensemble des 2000 circuits possibles.

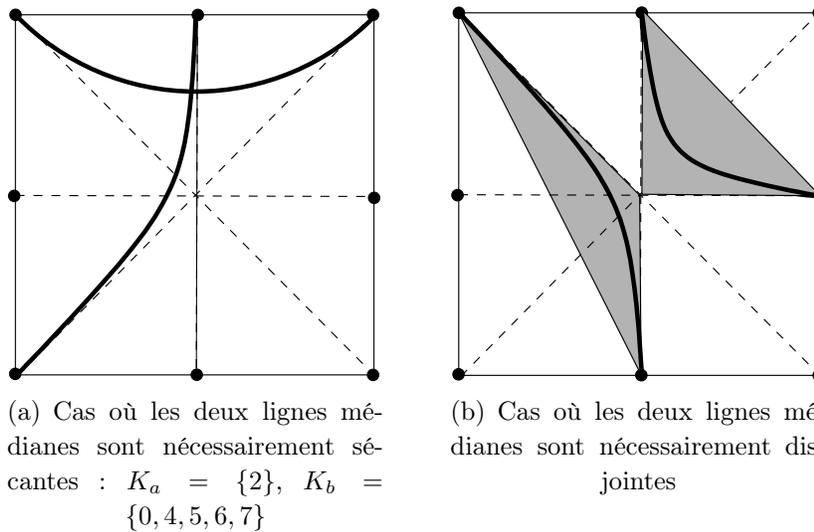
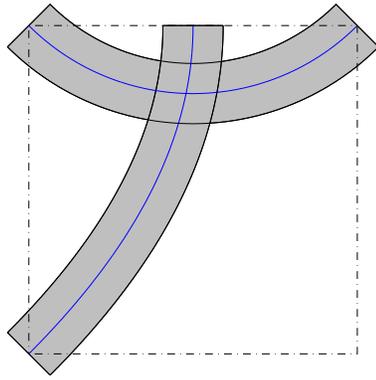
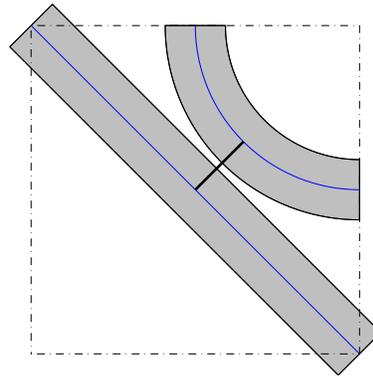


FIGURE 13. Deux pièces dans un seul même carré.



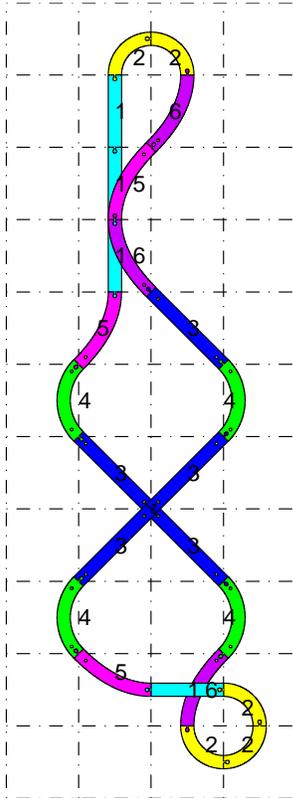
(a) Cas où les deux lignes médianes sont nécessairement sécantes



(b) Configuration où la distance entre les deux lignes médianes est la plus petite

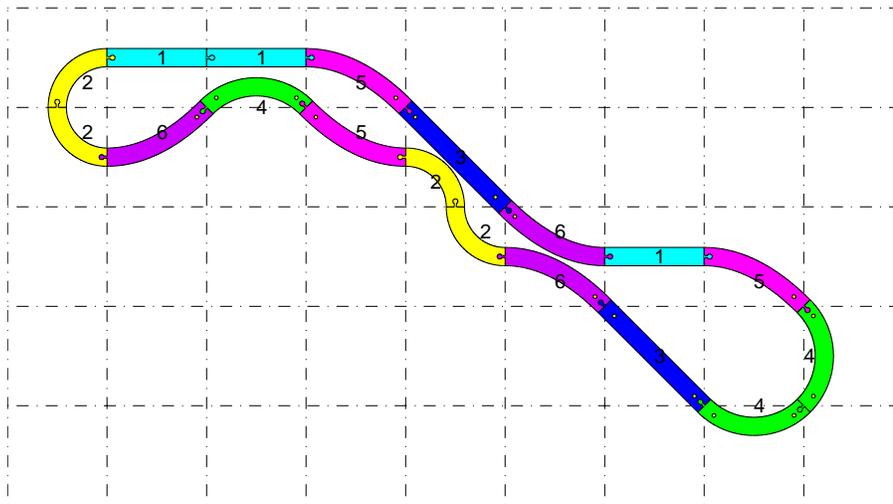
FIGURE 14. Deux pièces dans un seul même carré.

1: 4, 2: 5, 3: 5, 4: 4, 5: 3, 6: 3



(a) Un circuit non constructible

1: 3, 2: 4, 3: 2, 4: 3, 5: 3, 6: 3



(b) Un circuit constructible

FIGURE 15. Deux circuits.

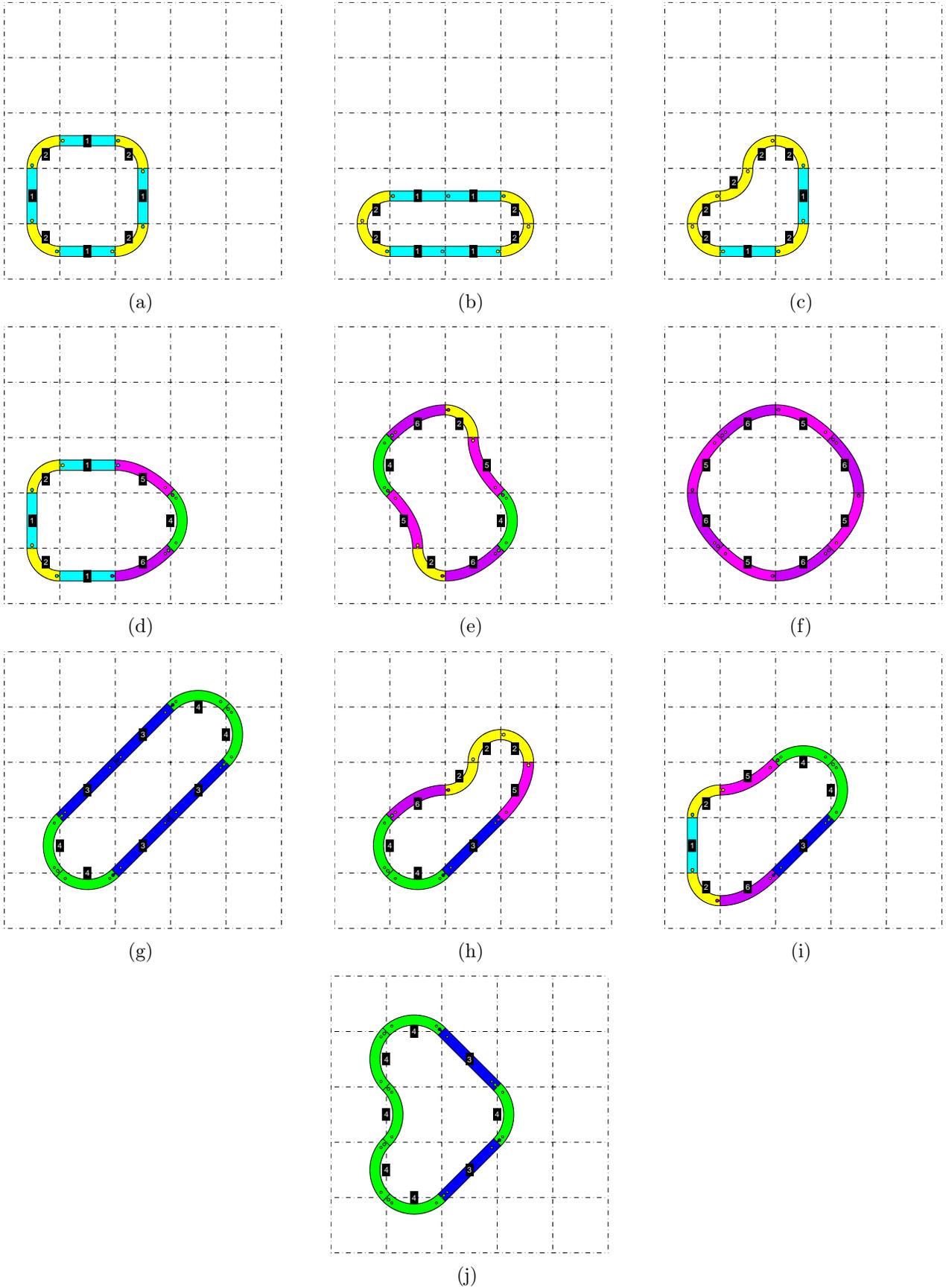


FIGURE 16. 10 des 33 circuits retenus sur l'ensemble des 250000 circuits possibles.

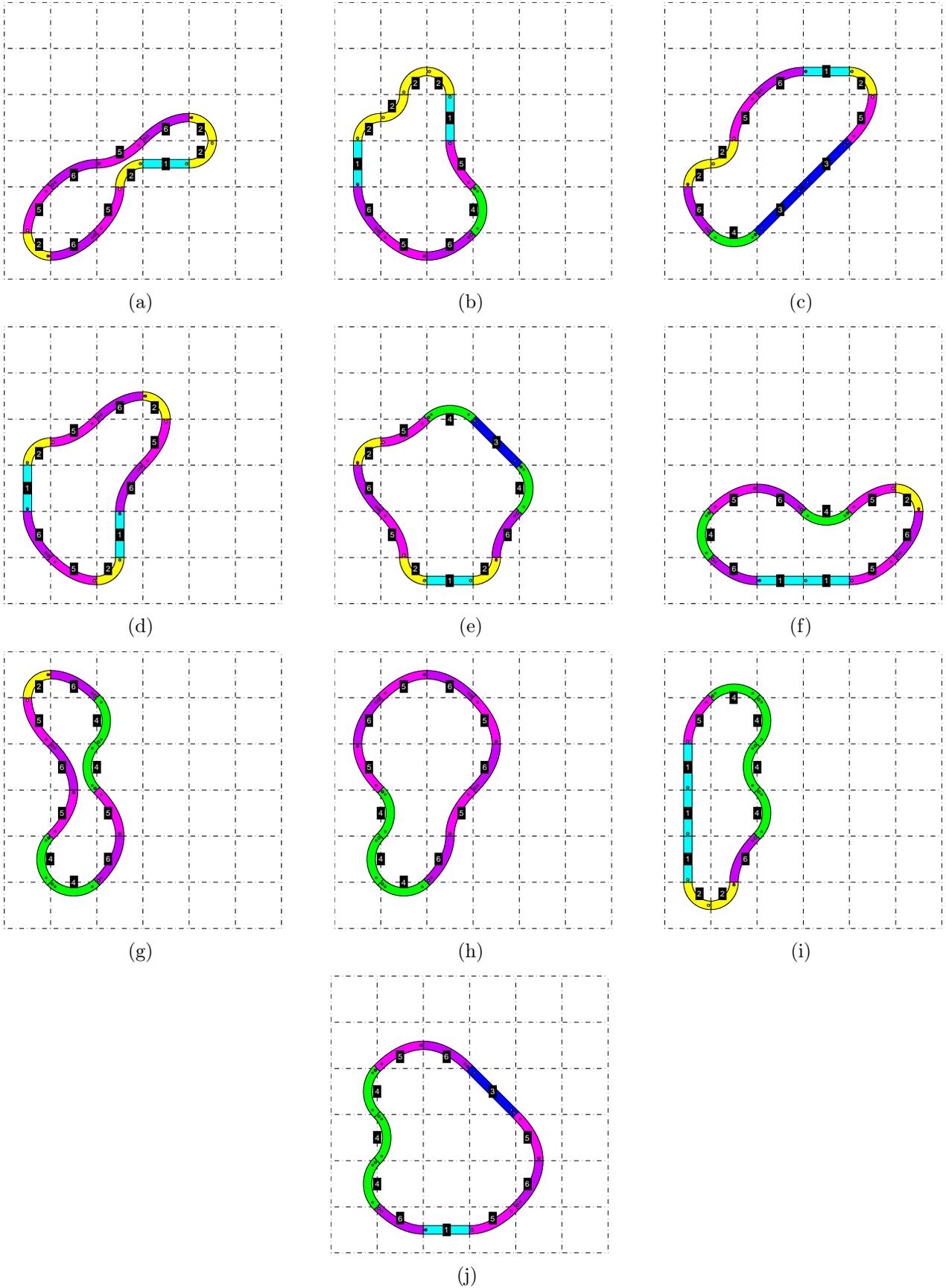


FIGURE 17. 10 des 753 circuits retenus sur l'ensemble des 31250000 circuits possibles.

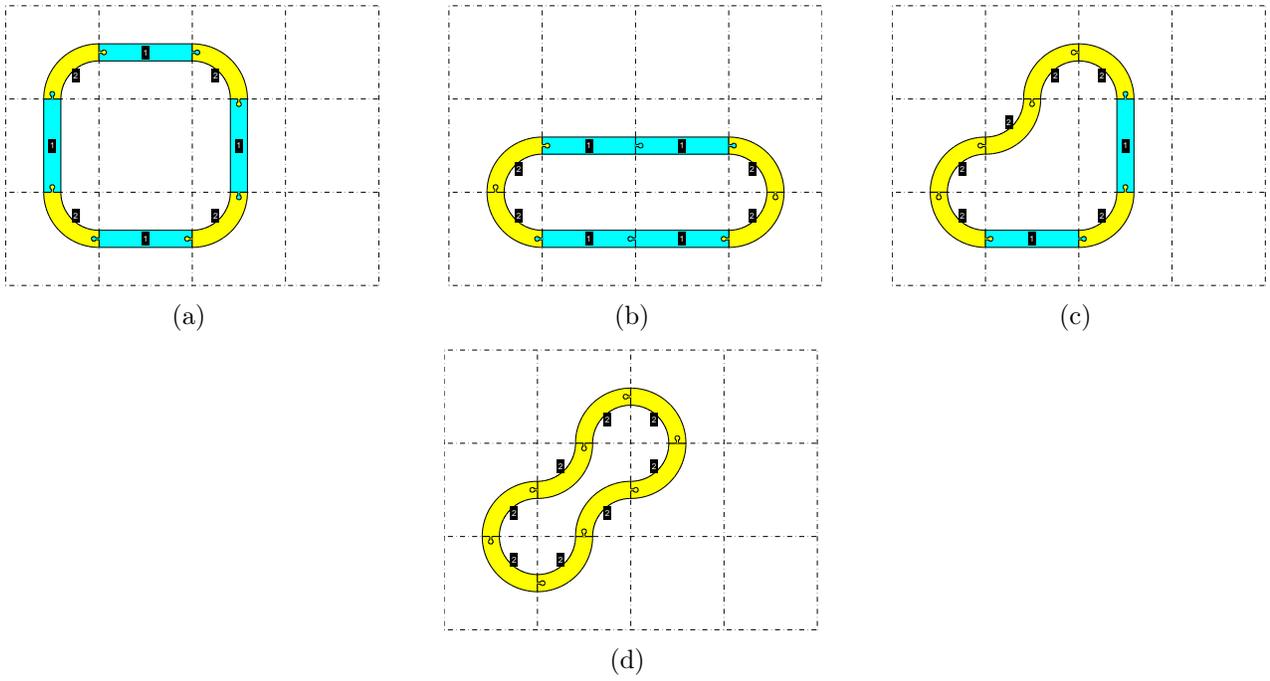


FIGURE 18. Tous les 4 circuits retenus sur l'ensemble des 250000 circuits possibles.

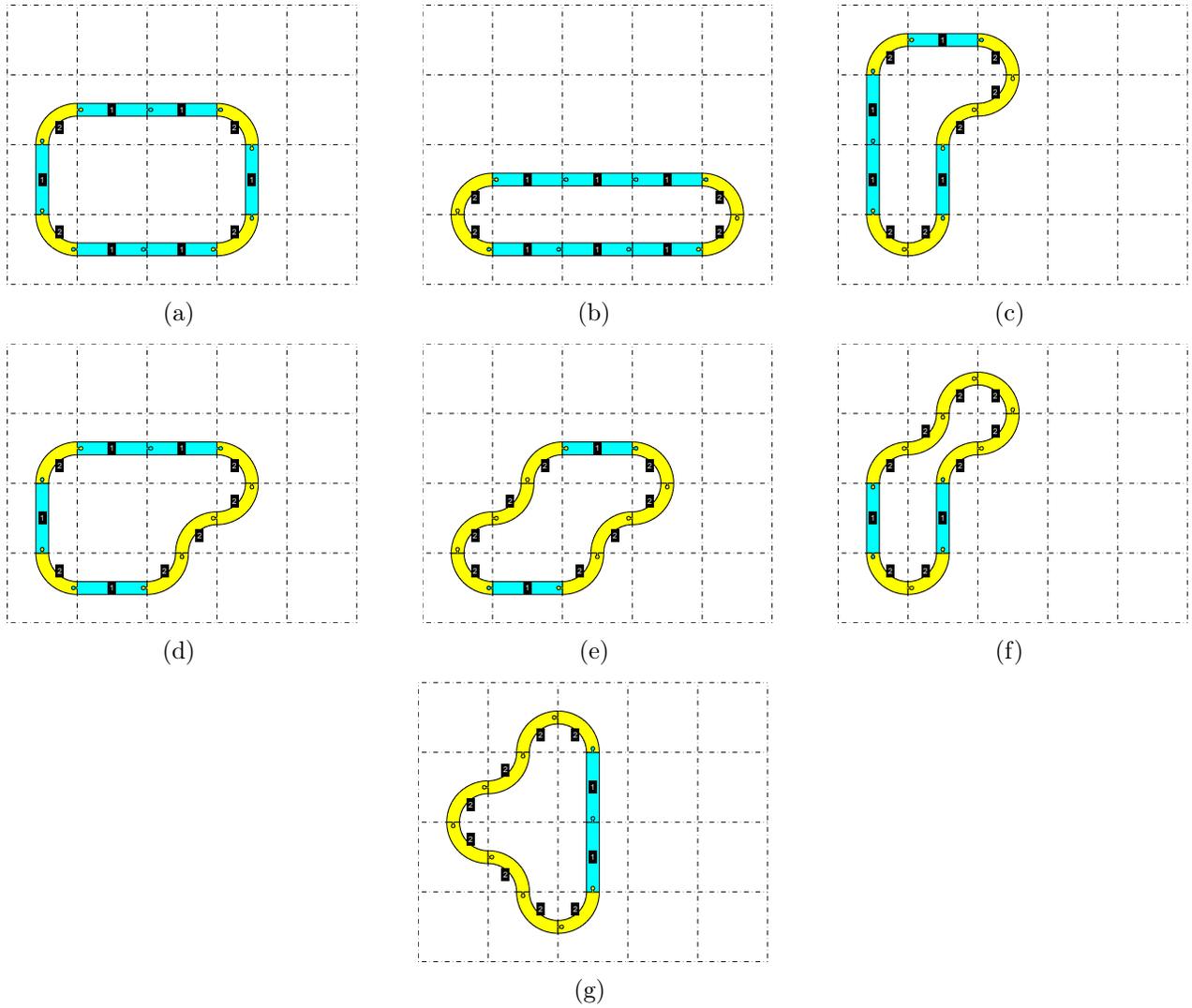


FIGURE 19. Tous les 7 circuits retenus sur l'ensemble des 6250000 circuits possibles.

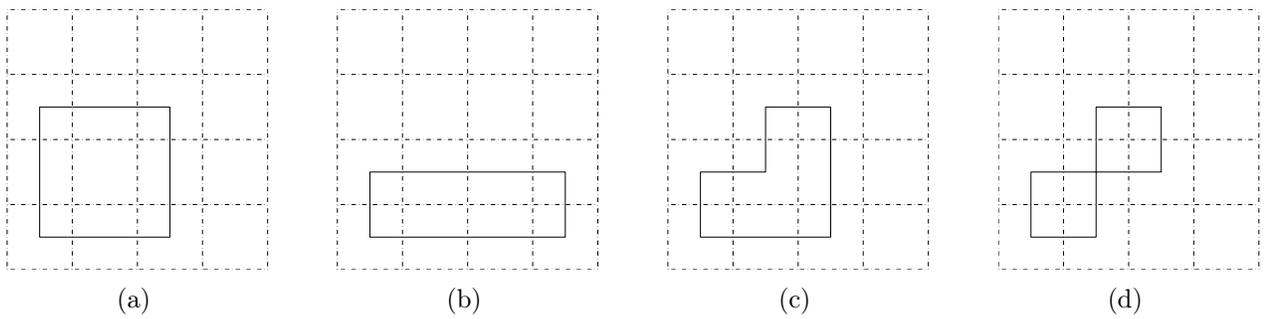


FIGURE 20. Les 4 circuits à 8 pièces tracés sous forme de polygone.

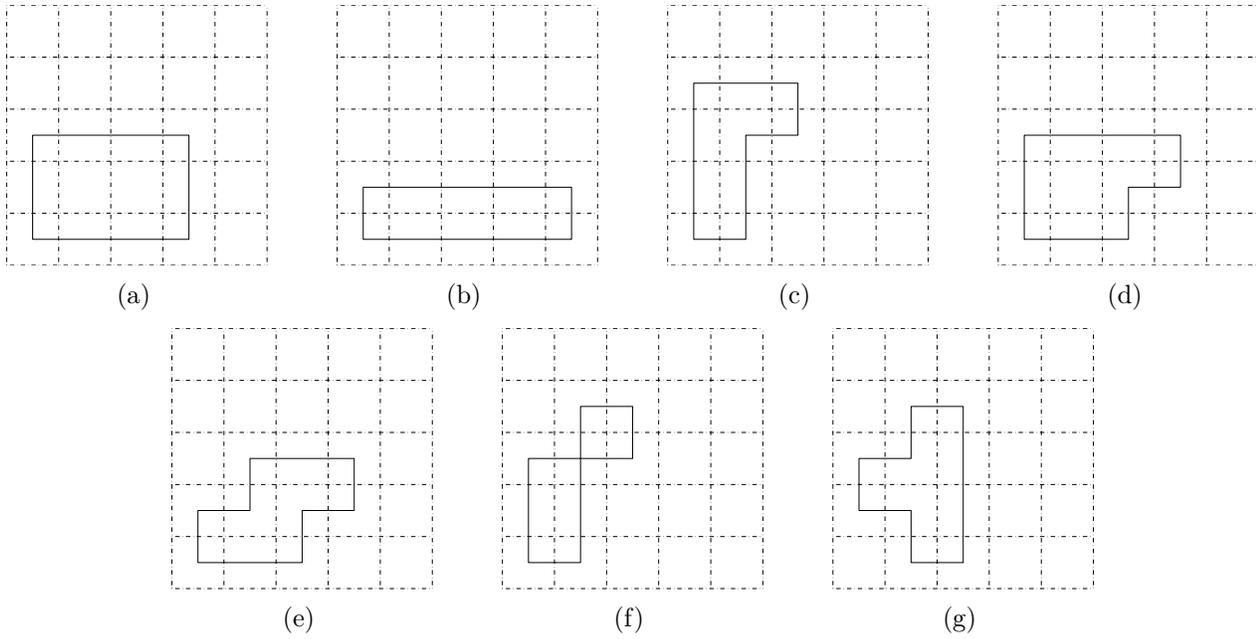


FIGURE 21. Les 7 circuits à 10 pièces tracés sous forme de polygone.

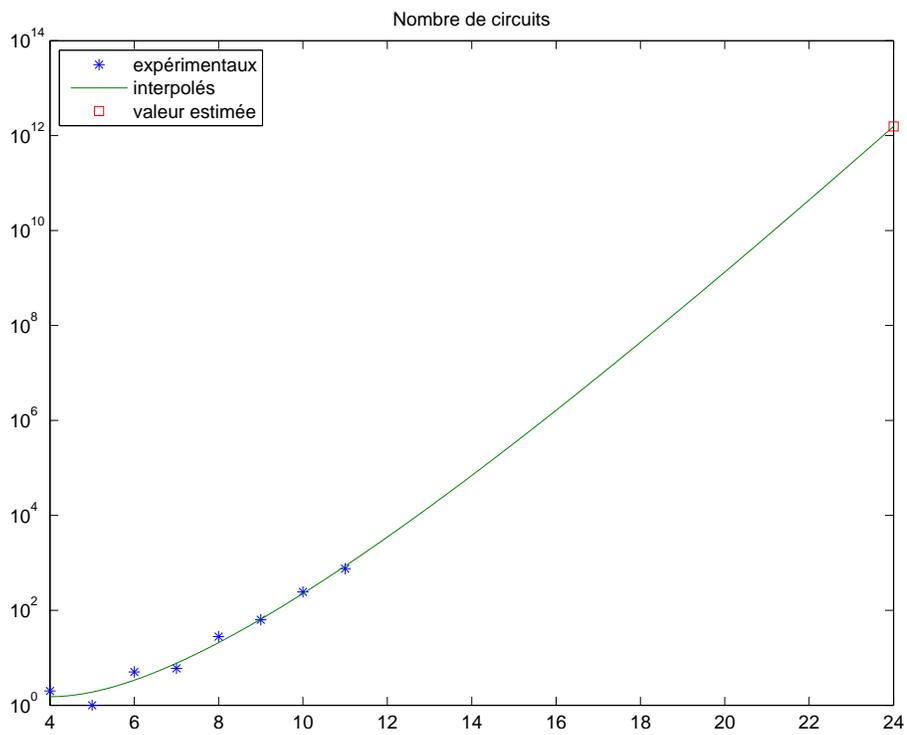


FIGURE 22. Estimation du nombre de circuits dans le cas  $N_j = 4$ .

1: 4, 2: 3, 3: 1, 4: 3, 5: 3, 6: 3

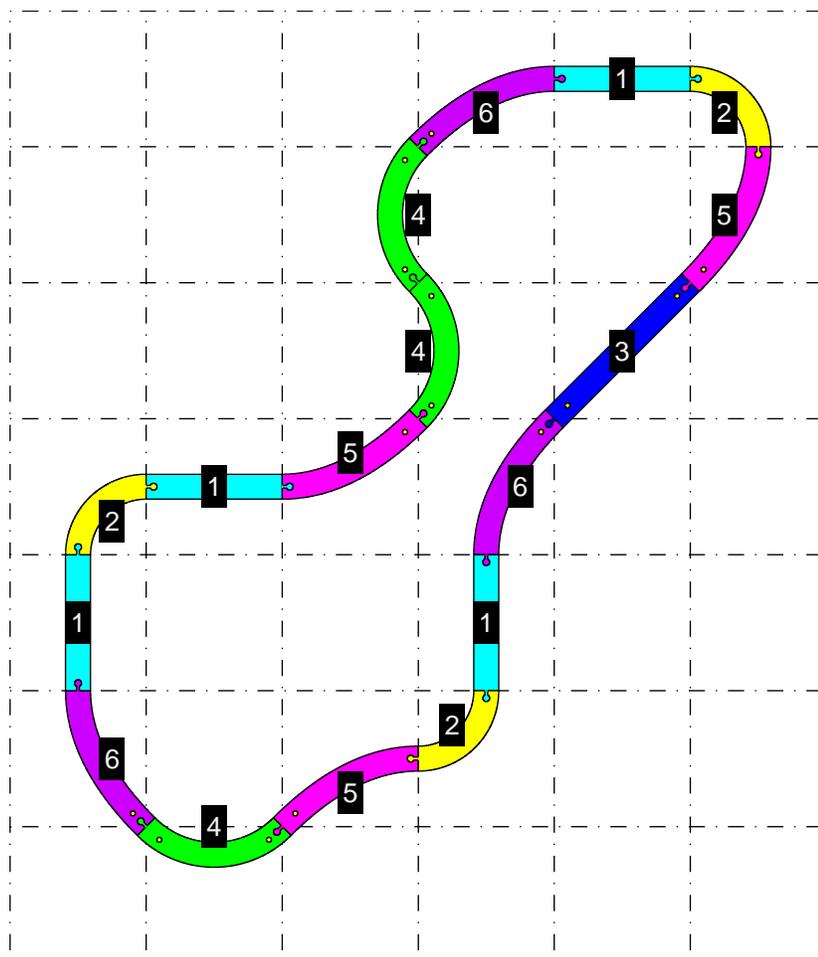
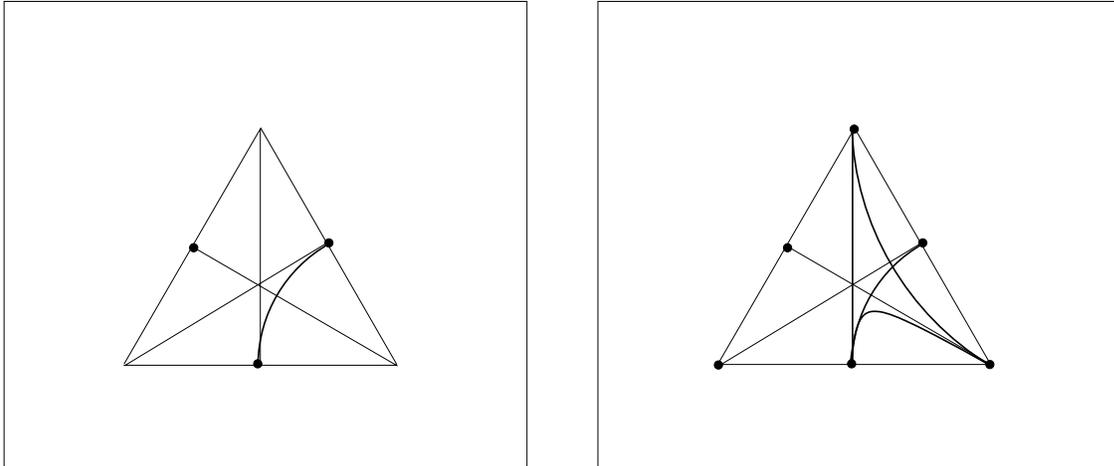


FIGURE 23. Un circuit aléatoire à 17 pièces.



(a) : avec les 3 milieux

(b) : avec les 3 milieux et les 3 sommets

FIGURE 24. Autres pavages possibles : le triangle équilatéral

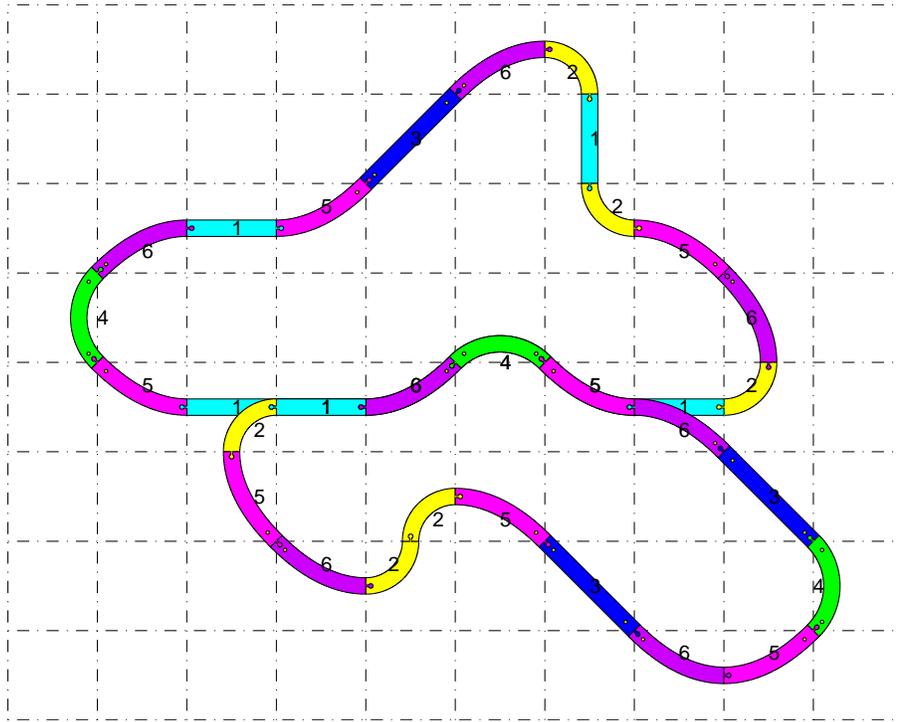


FIGURE 25. Un exemple de plan de circuit avec 2 aiguillages.

1: 4, 2: 4, 3: 4, 4: 4, 5: 4, 6: 4

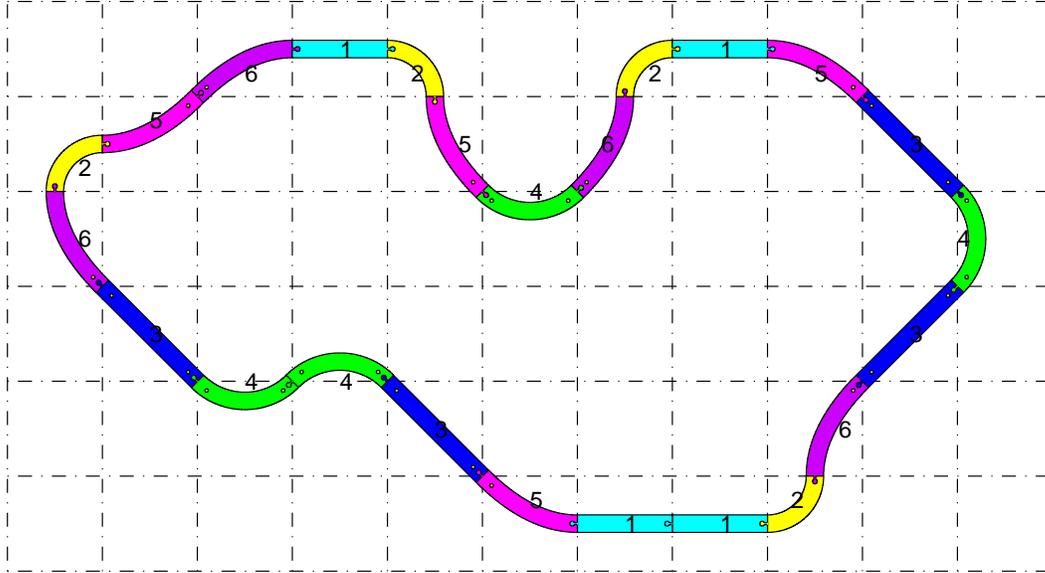


FIGURE 26. Un exemple de plan de circuit avec 24 pièces.