ATELIER-CONFÉRENCE : « DIVERS ASPECTS MATHÉMATIQUES D'UN CIRCUIT DE TRAIN EXTENSIBLE ET MODULAIRE »

JÉRÔME BASTIEN

Résumé. Contrairement aux circuits traditionnels de jeux pour trains miniatures, un système breveté permet de créer un grand nombre de circuits, avec un nombre minimum de rails, dont les boucles se referment toujours bien. Outre la construction géométrique des pièces constituant ce circuit, l'exposé proposé montrera les différentes notions mathématiques utilisées, allant du collège jusqu'à l'université (jusqu'au niveau Licence ou Master et même recherche) : sans être exhaustif, citons : droites et de cercles, théorème de Pythagore, continuité, vitesse, continuité de la dérivée, pavage, paraboles et courbes de Bézier, rayon de courbure, accélération normale, repère de Frenet, homothétie, isométrie, groupes d'isométries du carré, chemins et polygones auto-évitants. Cet exposé reprend des travaux présentés en partie sous différentes formes lors d'exposés grand public ou plus confidentiel (voir `http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/detail_brevet_rails.html`) et utilisé lors d'ateliers dans un stage mathsC2+ (voir `http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/index.html`).

Une collaboration est en cours avec Nicolas Pelay, de l'association Plaisir Maths (`http://www.plaisir-maths.fr/`) pour tenter de développer l'intérêt pédagogique et didactique et des notions abordées dans cet exposé.

Dans cet exposé, seules les différentes idées mathématiques et leur enchaînement successifs sont présentés ; le matériel pedadogique et didactique, en cours de préparation, n'est pas encore évoqué ici.

1. Introduction

Un brevet [Bas12 ; Bas13] délivré permet de construire un circuit transportant des véhicules miniatures. Fondé sur un pavage du plan par des carrés, il met en œuvre un certain nombre d'idée géométriques relativement simples qui peuvent être comprises par des élèves du secondaire ; d'autres idées et questionnements peuvent aussi s'adresser à des étudiants, en licence voire au-delà.

En section 2, le principe de construction de ce circuit est brièvement donné. En section 3, les différents thèmes abordés sont présentés.

En annexe B, je donne les différentes formes de matériels réalisés et utilisés lors des présentations différentes. En annexe C, se trouvent quelques commentaires des présentations qui ont déjà faites de ce circuit, sous des formes différentes à des étudiants, voire enseignants-chercheurs, élèves de secondes et grand public.

Ce document est assez long, mais il me semble important de préciser la construction, inédite, de ce jeu. Seules les différentes idées mathématiques et leur enchaînement successifs sont présentés ; le matériel pedadogique et didactique est en cours de préparation.

Date: 19 septembre 2016.

2. Principe de construction

Les circuits pour enfants existent depuis longtemps et permettent de transporter aussi bien des petits trains de bois que des voitures ou des trains miniatures. Par exemple, on pourra se référer aux marques déposées *Brio* ®, *Scalextric* ® ou *Jouef* ®. Il existe aujourd'hui des circuits formés d'un très grand nombre de pièces différentes, c'est-à-dire supérieur à dix. Ce grand nombre de pièces est intéressant car il permet de fabriquer différents circuits à partir du même ensemble de pièces. En revanche, à cause de ce grand nombre de pièces différentes, il existe aussi de nombreuses situations où il n'est pas possible de raccorder simplement les deux extrémités du circuit pour le refermer sur lui-même. Dans certains cas, cela n'est tout simplement pas possible. Pour remédier à cet inconvénient, l'une des solutions consiste à rajouter des pièces de guidage supplémentaires, permettant de raccorder les extrémités du circuit qui, auparavant, n'étaient pas raccordables. Cela conduit donc à augmenter le nombre de pièces différentes et crée de nouvelles situations où il n'est pas possible de raccorder les deux extrémités du circuit. Souvent, les circuits proposés présentent un jeu, plus ou moins important, qui permet de créer de grands circuits. Ce jeu, d'origine géométrique, est pris en compte dans les pièces constituant ces circuits. Par exemple, les pièces de connexions (tenon/mortaise) des rails *Brio* ® laissent les rails se déplacer très légèrement entre eux («Vario system», voir `http://www.woodenrailway.info/track/trackmath.html`). Les rails de trains de modélisme peuvent être légèrement déformés afin de boucler le circuit. L'accumulation de ces jeux permet certes de boucler le circuit construit, néanmoins ce jeu rend souvent difficile la fermeture de la boucle et, si celle-ci se referme, il est aussi possible que la discontinuité produite fasse dérailler les véhicules miniatures qui empruntent ces circuits. À l'opposé, il existe des circuits formés de très peu de pièces différentes. Le nombre de circuits fermés réalisables avec un ensemble donné de ces pièces est alors très faible. Par exemple, il n'existe souvent qu'une seule combinaison des pièces de cet ensemble permettant de refermer le circuit sur lui-même.

Le système brevété [1] vise à pallier ces inconvénients en proposant un circuit ou un ensemble de pièces de guidage qui :

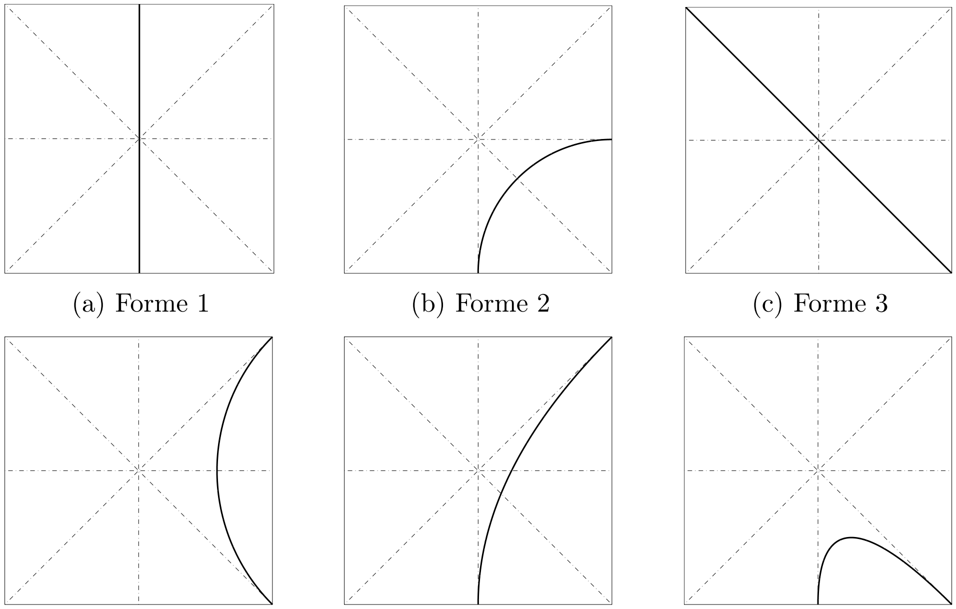
- permet la réalisation d'un grand nombre de circuits fermés à partir du même ensemble de pièces,
- utilise un minimum de pièces de guidage différentes,
- garantit qu'il est toujours possible de refermer simplement le circuit sur lui-même.

Le jeu entre les pièces de ce système sera rigoureusement nul, contrairement aux systèmes traditionnels, permettant un emboîtement parfait des boucles du circuit. La fabrication prévoira toutefois un jeu très faible permettant la connexion entre elles des pièces du circuit grâce à des couples de tenons/mortaises. Typiquement, ce système concerne le domaine des circuits de trains pour enfants. Il peut concerner également le domaine des circuits de petites voitures ou similaires.

Le principe de ce système est de définir un chemin Γ de $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui assurera la continuité entre deux pièces successives du circuit ainsi que leur bon assemblage. Soit N un entier naturel quelconque non nul. Deux idées fondamentales sont utilisées :

- On considère un ensemble de carrés $\mathcal{C}_i$, $1 \leq i \leq N$ appartenant tous à un pavage du plan par des carrés. Chaque carré contient une partie du chemin Γ et l'intersection d'un carré $\mathcal{C}_i$ avec Γ est notée Γ_i.
- Pour chacun des carrés $\mathcal{C}_i$, la courbe Γ_i doit vérifier les contraintes suivantes :

1. une commercialisation de ce jeu a été tentée (voir `http://easyloop.toys/`) et une marque a été déposée *Easyloop* ®.



(a) Forme 1 (b) Forme 2 (c) Forme 3

(d) Forme 4 (e) Forme 5 (f) Forme 5'

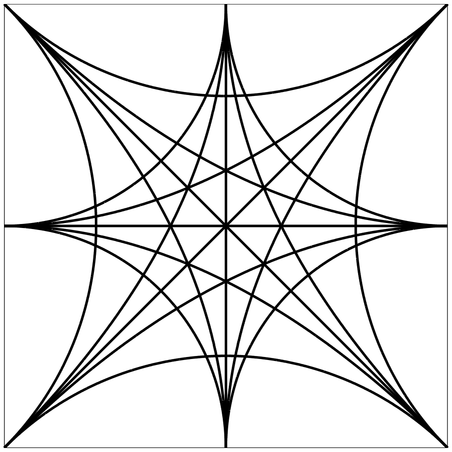
FIGURE 1. Les six formes de base

- elle est contenue dans le carré $\mathcal{C}_i$,
- elle débute sur un sommet du carré ou un milieu d'un côté du carré en un point A_i et se termine sur un autre sommet du carré ou un milieu d'un autre côté du carré en un point B_i,
- elle est tangente en A_i et en B_i aux droites reliant respectivement le centre du carré aux points A_i et B_i.

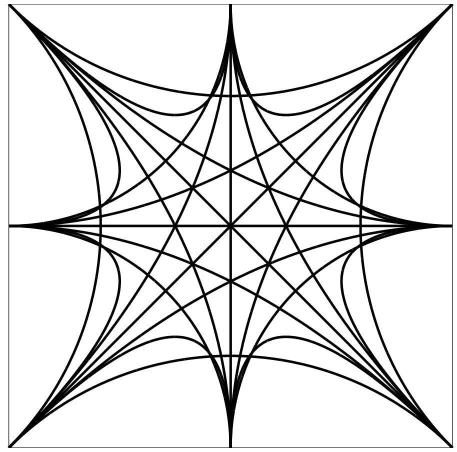
Ainsi, le chemin Γ sera défini comme la réunion des courbes $(\Gamma_i)_{1\leq i\leq N}$. Pour $1 \leq i \leq N-1$, chacun des carrés $\mathcal{C}_i$ doit avoir en commun un unique sommet ou un unique côté avec le carré voisin $\mathcal{C}_{i+1}$. Si $i = N$, la même règle s'applique pour les carrés $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_N$.

Il reste maintenant à définir la géométrie de chacune des courbes Γ_i. Fixons $i \in \{1, ..., N\}$. Appelons $\mathcal{H}_i$, l'ensemble des huit points formés par les quatre milieux et les quatre sommets du carré $\mathcal{C}_i$. Pour avoir un nombre élevé de circuits, nous chercherons toutes les courbes possibles correspondant à tous les choix possibles de couples de points distincts A_i et B_i dans $\mathcal{H}_i$, ce qui représente *a priori* $C_8^2 = 28$ cas. Cependant, le carré possède un groupe d'isométries $\mathcal{S}$ le laissant invariant de cardinal 8, ce qui réduit à 6 le nombre de courbes possibles. On définit 6 type de courbes de la façon suivante :

- un premier type regroupant uniquement les courbes pour lesquelles les points A_i et B_i sont les milieux de deux côtés opposés du carré,
- un deuxième type regroupant uniquement les courbes pour lesquelles les points A_i et B_i sont les milieux de deux côtés adjacents du carré,
- un troisième type regroupant uniquement les courbes pour lesquelles les points A_i et B_i sont deux sommets diagonalement opposés du carré,
- un quatrième type regroupant uniquement les courbes pour lesquelles les points A_i et B_i sont deux sommets immédiatement consécutifs du carré,



(a) avec 5 pièces de base



(b) avec 6 pièces de base

FIGURE 2. Ensemble des trajets possibles.

- un cinquième type regroupant uniquement les courbes pour lesquelles les points A_i et B_i sont un milieu d'un côté et un sommet du côté opposé du carré,
- un sixième type regroupant uniquement les courbes pour lesquelles les points A_i et B sont un milieu d'un côté et un sommet du même côté du carré.

De telles contraintes ne définissent pas encore totalement les courbes, mais nous les cherchons maintenant dans l'ensemble des segments de droites ou des arcs de cercle, comme dans le monde du jouet. Les premier et troisième types contiennent uniquement des segments de droites de longueurs respectives 1 et $\sqrt{2}$ (figures 1(a) et 1(c)). Les deuxième et quatrième types contiennent uniquement des quarts de cercles, de rayons respectifs $1/2$ et $\sqrt{2}/2$ (figures 1(b) et 1(d)). Enfin, pour les deux derniers types, il n'existe pas d'arc de cercle. On cherche donc une solution par exemple sous la forme d'une parabole définie par deux points A_i et B_i et les deux tangentes associées. On peut, soit déterminer l'unique parabole ainsi définie, soit, ce qui revient au même, déterminer l'unique courbe de Bézier de degré deux, qui est alors définie par les points de contrôle suivants : le point A_i, le centre du carré c_i et le point B_i (figures 1(e) et 1(f)).

Si fait opérer le groupe des 8 isométries $\mathcal{S}$ sur les 6 courbes de la figure 1, on obtient bien les 28 courbes possibles de la figure 2(b).

Le sixième type de la figure 1(f) n'a pas pu être construit sur les rails en bois, puisque la pièce correspondante possède un rayon de courbure minimal trop petit pour que des véhicules miniatures puissent y rouler, ce qui réduit à 20 le nombre de trajets possibles (voir la figure 2(a)). Dans ce cas, la règle « toute courbe relie deux points distincts quelconques de $\mathcal{H}_i$ » est à remplacer par « toute courbe relie deux points quelconques distincts et non voisins de $\mathcal{H}_i$ », ce qui, on le verra par la suite, offre tout de même un grand nombre de circuits.

La courbe Γ est de classe $\mathcal{C}^1$; en effet, chacune des courbes Γ_i est de classe $\mathcal{C}^\infty$. En outre, la réunion de toutes ces courbes sera de classe $\mathcal{C}^1$; par construction, en effet, aux points de raccordement, qui ne peuvent être que des sommets ou des milieux des côtés de carrés, les courbes sont continues (puisqu'elles passent par les mêmes points de début et de fin) et à dérivée continue, puisque les tangentes coïncident.

Une fois le chemin Γ construit, il reste à définir les différents types de rails constituant le circuit. Chacun des type de rails sera donc défini à partir de l'un des six types de courbes précédemment définis. Ces courbes constituent la ligne médiane de chacun des types de pièces. Les passages des roues sont définis comme deux courbes à distance constante de cette courbe médiane, c'est-à-dire : chaque point de l'une de ces deux courbes se trouve sur une droite perpendiculaire à la tangente à la ligne médiane à une distance constante de la courbe médiane. Les bords de rails sont définis de la même façon. La section transversale de la pièce est définie de façon classique (voir par exemple `http://pw1.netcom.com/~thoog/hnr/hnr.html`). Enfin, les connecteurs sont des tenons/mortaises, conçus de telle sorte que chaque rail possède un tenon et une mortaise. Les extrémités des pièces pouvant être soit des milieux de côté, soit des sommets, il a fallu marquer sur les rails les extrémités correspondant à des sommets, ce qui a été réalisé grâce au perçage d'un petit trou (représenté par un petit cercle jaune sur les plans de ce document). L'enfant qui joue à assembler les pièces aura donc cette unique règle à respecter : « n'assembler des pièces entre elles que si les deux extrémités des deux pièces contiguës ont la même nature (absence ou présence simultanée de trou) ». Cette règle est la seule règle à respecter pour pouvoir faire des circuits qui se rebouclent bien !

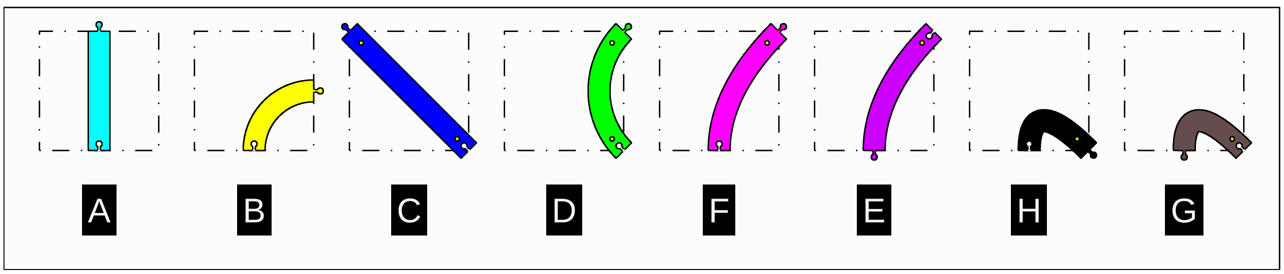


FIGURE 3. La numérotation des pièces.

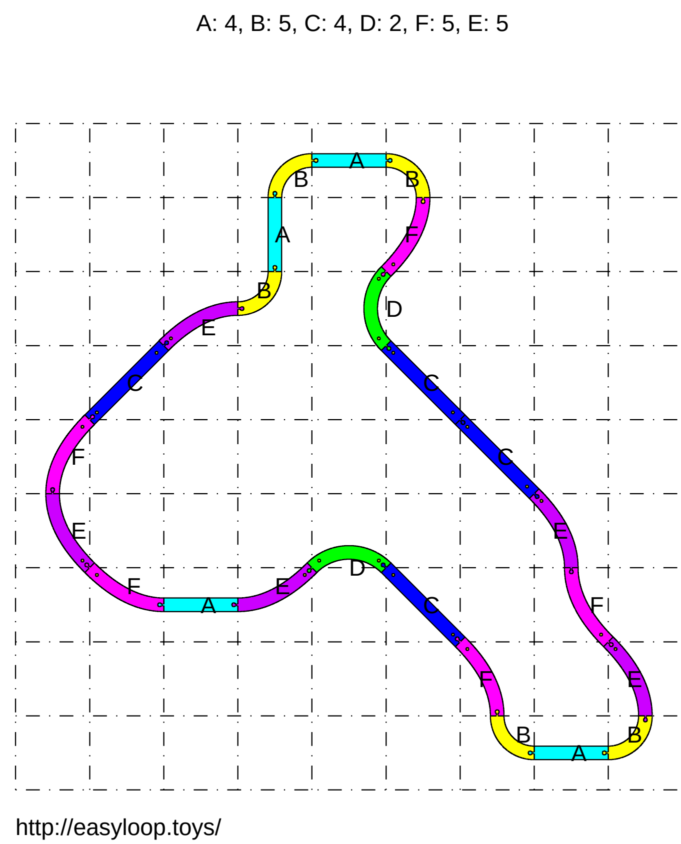
Les pièces de types 1 à 4 sont symétriques : elles possèdent un plan de symétrie perpendiculaire à la courbe médiane, et puisque la section est elle-même symétrique, il suffit donc de construire un seul type de pièces pour ces quatre types. En revanche, la pièce de type 5 ainsi que celle de type 6, n'est pas symétrique et les deux extrémités n'ont donc pas le même rôle. Il a donc fallu construire deux pièces différentes où les prises mâles et femelles sont inversées pour pouvoir réaliser le circuit. Les pièces sont désormais numérotées comme l'indique la figure 3. Notons que les pièces G et H n'ont pas été fabriquées sous forme de rails en bois.

On pourra voir sur la figure 4 un exemple de circuit réellement construit et le plan correspondant. Plus de détails peuvent être trouvés à la page dédiée suivante :
`http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/detail_brevet_rails.html`
ou sur les documents [Bas15b ; Bas15c] disponibles sur Internet aux url suivantes :
`http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_forum_2015.pdf`
`http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_MMI_2015.pdf`

3. Thèmes abordés

Ce jeu permet d'aborder de nombreux thèmes mathématiques et constitue donc un point départ à partir duquel on peut réfléchir sur ces thèmes ou au contraire ... un point d'arrivée qui permet de vérifier que les constructions géométriques ont bien été réalisées.

(a)



(b)

FIGURE 4. Un circuit et le plan associé.

Lors de l'exposé, la construction et les thèmes géométriques présentés ci-dessous seront abordés simultanément, mais je les dissocie ici. Les détails ne sont pas toujours donnés, mais cette section a pour objet de montrer la multiplicité des notions abordées.

3.1. Mise en place du principe de construction

On peut commencer par montrer le principe du jeu, sans évoquer les règles de construction, de montrer un circuit simple et de faire deviner à l'auditoire les formes de pièces et le rôle des trous présents à chaque extrémité ou non.

La première idée de base, le pavage, est relativement aisée à comprendre ; on peut prendre un petit peu de recul et évoquer des pavages plus complexes, par exemple, à partir de tableaux d'Esher, artiste souvent évoqué par les mathématiciens !

On s'intéresse ensuite à la ligne médiane définissant chaque rail ; les bords et les passages des roues en seront déduits. La seconde idée, de construire une courbe dans chaque carré, qui soit définie par ses extrémités et ses tangentes est plus difficile à introduire, notamment au collège où les notions de dérivée, de tangente et de vitesse instantanée sont inconnues. Cependant, dans un premier temps, on peut montrer deux rails, dont les extrémités ne coïncident pas et montrer que l'assemblage n'est pas possible, ce qui introduit la notion de continuité entre deux portions de courbes appartenant à deux carrés différents. Dans un second temps, on pourra montrer deux rails dont les extrémités coïncident, mais sans que les bords opposés ne soient parallèles, ce qui rend l'assemblage tout autant impossible et permet d'expliquer qu'une notion supplémentaire (celle de continuité de la dérivée) doit être considérée. La vitesse peut être introduite de façon mécanique, puisque c'est précisément la vitesse [2] de la locomotive ou de tout véhicule qui emprunte ce circuit ! On peut montrer aussi que la vitesse de la locomotive doit être identique lors d'un changement de carré, donc que les tangentes aux extrémités des différentes portions de courbes doivent se raccorder. Sur l'un des deux bords convexes de chaque rails non droits, la tangente est, dans ce cas, la seule droite qui n'a qu'un seul point commun avec la courbe et on la matérialise en posant un rail droit sur le rail courbe, au point de contact souhaité ! Enfin, on peut aussi présenter des zooms successifs de courbes, pour montrer que la tangente se rapproche de plus en plus de la courbe. En fait, les trois types de courbes ont des tangentes que l'on peut construire géométriquement, à partir de la définition de la courbe : quand la portion de courbe est un segment de droite, elle se confond avec sa tangente. Pour les arcs de cercles, même un collégien doit comprendre que les tangentes sont orthogonales au rayon. Pour le dernier de type de courbe, la parabole, on donnera des éléments sur sa tangente en introduisant la construction (section 3.2).

Le fait que chaque point de l'ensemble des huit milieux et des sommets doit être relié à tous les autres permet d'introduire les combinaisons à 2 éléments d'un ensemble de cardinal n et peut illustrer par exemple par le problème des « Tchins » : si n personne trinquent ensemble, chacune d'elle une fois avec toutes les autres, combien de « Tchins » entend-on. On observe donc qu'il est nécessaire de construite, *a priori*, $C_n^2 = C_8^2 = 28$ courbes différentes.

3.2. Construction des courbes

On prendra des exemples de couples de points pour construire les courbes nécessaires.

On commencera par choisir deux points opposés et introduire les deux types de courbes rectilignes, portées respectivement par les médianes et les diagonales. Voir figures 1(a) et 1(c).

2. En négligeant le faible jeu qui existe entre les roues et le passage des roues.

Si les deux points sont deux sommets ou deux milieux successifs, on observera qu'il est possible de trouver deux types de quarts de cercle obéissant à la construction. Voir figures 1(b) et 1(d). Dans les calculs de rayons, puisque le théorème de Pythagore est utilisé dans un cas simple (triangle rectangle isocèle), on peut en profiter pour le démontrer simplement en calculant par exemple l'aire du triangle de deux façons différentes ou à la façon de Socrate dans le dialogue du Ménon. Évoquer aussi l'aspect irrationnel de $\sqrt{2}$? Il peut être aussi intéressant de se demander s'il n'existe pas d'autres cercles et introduire alors les notions de conditions suffisantes, nécessaires, ou d'unicité et d'existence, en utilisant peut-être le terme « analyse-synthèse » plus à la mode [3].

Dans le cas où l'on considère un milieu et un sommet opposé ou adjacent, on peut montrer, en introduisant le raisonnement par l'absurde, qu'un cercle ne peut être la solution. Voir figures 1(e) et 1(f). Il est alors nécessaire d'introduire la notion de parabole et en profiter, pour aborder des présentations différentes de la traditionnelle présentation faite en classe de terminale, par le biais du polynôme du second degré. Plusieurs approches sont possibles, en fonction du public : pour les collégiens, on peut se contenter d'évoquer le foyer (au sens étymologique du terme puisqu'il y fait chaud !) d'une parabole par laquelle passent les rayons, parallèles à la directrice, après réflexion. Tous les collégiens ont déjà vu des paraboles de télévision ! Cette propriété vue, on peut leur montrer la directrice et le foyer et leur faire déduire que la tangente à la parabole, au point correspondant à l'un des sommets du carré, passe bien par le centre du carré. Pour les élèves de lycée, il est possible de leur faire construire une parabole, à la main, sur des patrons distribués, en leur donnant la construction par « fils », en leur expliquant que cette méthode n'est rien d'autre que la construction de Bézier, elle-même inspirée par De Casteljau, qui lui-même se serait inspiré [4] d'une idée que les Grecs connaissaient il y a deux mille ans ! Cette méthode alternative peut aussi être évoquée. Pour les étudiants niveau Licence, on peut passer par l'interpolation d'Hermite. Sans leur donner le cadre général, on peut leur faire construire le polynôme de degré 2 ou 3 en utilisant un système linéaire. Cela peut aussi être l'occasion de leur montrer les courbes paramétrées, dont on leur dit souvent que ce sont des notions utilisées en mécanique, puisqu'elles représentent des trajectoires de points matériels, représentant réellement le mouvement d'un point d'un véhicule empruntant ces rails ! Pour les étudiants de troisième année, on peut aussi évoquer l'interpolation de Hermite comme un passage à la limite obtenu à partir de l'interpolation de Lagrange. On peut aussi, de façon, un peu plus abstraite, donner une construction purement géométrique du foyer et de la directrice de l'unique parabole, définie par deux points et les deux tangentes correspondantes (non parallèles).

L'une des paraboles construites (figure 1(f)) n'a pas donné lieu à la construction du rail en bois correspondant, trop incurvée pour qu'un véhicule miniature puisse l'emprunter. Cela peut être l'occasion d'évoquer le rayon de courbure, pour les étudiants. Pour les lycéens, sans évoquer la définition du rayon de courbure, on peut lier la courbure à la variation de l'angle de la tangente avec l'horizontale sur la variation de la distance parcourue (soit l'abscisse curviligne) ou au cercle osculateur.

Toutes ces constructions présentées, il peut être intéressant de faire deviner de nouveau à l'auditoire que les extrémités des rails munies d'un trou correspondent à un sommet, tandis que celles sans trou correspondent à un milieu. Pour l'unique pièce non symétrique (correspondant à la courbe de la figure 1(e)) et qui ne possède qu'une seule extrémité munie d'un trou, il peut être intéressant de faire deviner à l'auditoire comment retrouver géométriquement cette extrémité.

3. mais que je trouve moins pertinent !
4. ce n'est qu'une supposition que je fais !

3.3. Homothétie

Les pièces A et C sont identiques, à une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ près ; il en est de même des pièces B et D. Si on construit un circuit ne contenant que les pièces A et B, on peut construire son homothétique de rapport $\sqrt{2}$ et obtenir ainsi le même circuit ne contenant donc que les pièces C et D.

3.4. Retour sur les six formes seulement utilisées

Dans les boites de rails ne figurent que 6 types de rails différents, les 4 premiers types correspondant aux 4 formes de courbes des figures 1(a) à 1(d), tandis que les deux derniers correspondent à la courbe de la figure 1(e), dupliquée de telle sorte que la prise mâle puisse correspondre à un milieu et un sommet. La dernière figure 1(f) n'a pas son rail correspondant. Ainsi, modulo la disposition des prises mâles-femelles, seules 6 courbes sont nécessaire et il convient maintenant d'expliquer pourquoi elles permettent de retrouver les 28 courbes évoquées précédemment, pour relier chacun des huit sommets ou milieux à tous les autres.

On peut montrer que le carré a la particularité de rester invariant si on le tourne par rapport à son centre, d'un angle multiple de $\pi/4$, ou si on prend son symétrique par rapport à l'une des deux diagonales ou l'une des deux médianes. Ces notions doivent être comprises dès le collèges. Cela peut être aussi illustré en montrant que l'on peut faire aussi subir aux rails de bois ces mêmes opérations, qui correspondent donc à un déplacement. Les deux faces des rails (supérieures et inférieures) étant identiques, les rails peuvent être retournés et donc subir un anti-déplacement. Montrer qu'un antidéplacement fait intervenir une symétrie, contrairement aux déplacements, qui ne font intervenir que les rotations. On peut aussi montrer sur une série de figures que si l'on fait agir les 3 rotations ou les 4 symétries évoquées, ou tout simplement entre zéro et trois fois la rotation d'angle $\pi/4$ et éventuellement la symétrie par rapport à l'une des médianes, sur l'ensemble des courbes de la figure 1, on obtient bien l'ensemble des courbes de la figure 2(b) et donc que les 28 courbes ont donc été finalement bien construites.

Pour les lycéens, on peut expliquer que les 8 seules isométries laissant invariant le carré sont les 3 rotations ou les 4 symétries évoquées et l'identité et que composées entre elles, elles laissent aussi le carré invariant. Leur montrer que l'on est capable de déterminer toutes les isométries recherchées. En fait, il suffit de se restreindre par exemple à une rotation d'angle $\pi/4$ et de centre le centre du carré et la symétrie par rapport à l'une des médianes. Pour les étudiants de première année, on peut montrer la construction effective des isométries laissant le carré invariant et évoquer la structure de groupe de cet ensemble, engendré par exemple par la rotation d'angle $\pi/4$ et la symétrie par rapport à l'une des médianes.

3.5. Utilisation de la CAO

Une fois les courbes de base construites, des logiciels de CAO permettent de réaliser les modèles 3D des rails de bois. Sans entrer dans le détail de la CAO, on peut évoquer comment ces logiciels sont capables de gérer des segments de droites, des arcs des cercle et même des paraboles. Le passage de la 2D à la 3D se fait, dans ce cas, par le déplacement d'une section le long des 6 courbes construites. Reste ensuite à définir les tenons/mortaises.

3.6. Diverses extensions et réflexions

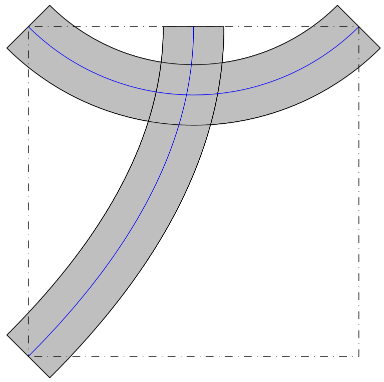
Pour les élèves du secondaire, on peut conclure partiellement sur un aspect utilitaire de la géométrie, tout en gardant à l'esprit que les mathématiques sont belles aussi parce qu'elle ne sont pas toujours utiles. Rappeler aussi que chez les Grecs, la géométrie était le commencement de la philosophie. On pourra évoquer d'autres jeux, comme le Dooble ou le Bazard Bizarre qui utilisent des constructions théoriques. Pour les terminales, montrer que les manipulations des paraboles par leur définition géométrique sont parfois plus pratiques que l'utilisation de la définition analytique. Finalement, il est plus pertinent et, à mon avis plus fécond, parfois de manipuler des concepts, telle la parabole, en utilisant leurs définitions originelles, plutôt que d'utiliser les représentations qui en découlent, comme l'expression analytique.

Pour l'ensemble du public, on peut s'intéresser au problème de dénombrement suivant : combien peut-on construire de circuits géométriquement différents à partir d'un nombre de pièces N donné ? Les manipulations sur les rails, les cartes carrées ou les logiciels distribués (voir section B) peuvent faciliter la réponse. Pour les plus grands, on peut aussi montrer que l'on est capable, pour des petites valeurs de N, de répondre de façon exhaustive en utilisant (et montrant !) la propriété suivante : un circuit est finalement entièrement déterminé par les carrés qu'il emprunte. On peut montrer aussi, que pour des valeurs de N plus grandes, les nombres de possibilités explosent vite ; de plus, à partir d'une certaine valeur de N, les circuits peuvent repasser par des carrés déjà utilisés ! Cette détermination de circuits se rapproche des domaines des mathématiques qui étudient les chemins auto-évitants, dont les énumérations constituent encore un problème ouvert et reste un domaine actif de la recherche. Un article sur cette question vient d'être accepté et est disponible sur le web [Bas16c ; Bas16d] aux adresses `http://arxiv.org/abs/1603.08775` et `http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/articles_provisoires/enumeration_circuit_JB_2016.pdf`. Cet élément constitue aussi la possibilité d'évoquer la recherche en mathématiques. Sur internet, un catalogue exhaustif des circuits réalisables avec un nombre de pièces donnés (sans utiliser les pièces G et H et avec les boites de jeux distribuées) est disponible :
`http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/catalogue_exhaustif_11rails.pdf`

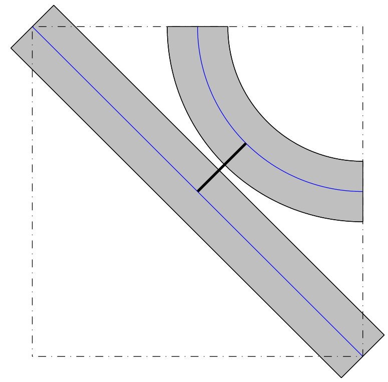
Lors du dénombrement de ces circuits, il a fallu prendre en compte le fait que plusieurs pièces puissent coexister dans le même carré. Plus précisément, pour cela, il est nécessaire et suffisant qu'elles soient disjointes. Soit elles se coupent de façon certaine (voir figure 5(a)), soit, au contraire, elles peuvent être disjointes (cf. figure 5(b)) ou non. Pour ce dernier cas, cette question fait intervenir la notion de distance entre deux courbes [5], chacune d'elle étant soit une droite, soit un cercle, soit une parabole. Plus de détails pourront être trouvés dans [Bas16c ; Bas16d, section 3.4]. Les cas où seuls les droites et les cercles interviennent peuvent être présentés au collège. La prise en compte des paraboles n'est plus possible de façon purement géométrique et fait apparaître des équations polynomiales. Cela peut être introduit au lycée voire à l'université : notions de minimum de fonction, systèmes non linéaires à résoudre numériquement.

Les notions de continuité et de continuité de la dérivée ont été introduites informellement aux élèves de secondaires. On peut aller plus loin et évoquer la notion de continuité du rayon de courbure, qui ici n'est pas vérifiée ! Sans évoquer directement le rayon de courbure, on peut noter qu'il intervient dans le confort du passager et le respect du matériel, puisque sa continuité implique celle de la l'accélération normale, obtenue grâce aux formules de Frenet. Il intervient aussi dans l'angle de braquage

5. on cherche à minimiser M_1M_2, M_1 et M_2 décrivant chacun une courbe.



(a) Cas où les deux lignes médianes sont nécessairement sécantes



(b) Configuration où la distance entre les deux lignes médianes est la plus petite

FIGURE 5. Deux pièces dans un seul même carré.

de la roue ou dans celui d'un vélo ; son absence de continuité serait là encore bien malheureuse pour le conducteur. Évidemment, les véhicule miniatures ne sont pas sensibles à tout cela, mais dans le transport réel, automobile ou ferroviaire, cela est fondamental. Des courbes de liaisons font varier continûment le rayon de courbure entre deux portions de trajectoires à rayon différent : ce sont les clothoïdes.

D'autres pavages que les carrés peuvent être utilisés, à une seule tuile, notamment les triangles équilatéraux ou les hexagones mais aussi à deux tuiles, comme carré et octogone. Il peut être intéressant de constater que le nombre de courbes dépend fortement de la ou des tuiles utilisées.

Enfin, une dernière extension géométrique est possible : on peut définir des croisements ou des aiguillages en réunissant plusieurs courbes de bases dans un seul même carré. La complexité est alors encore plus impressionnante, puisqu'apparaissent des boucles, nécessairement orientées à cause des tenons/mortaises et la théorie des graphes peut être introduite très informellement.

Une dernière piste de discussion possible peut être d'évoquer l'aspect conceptuel des mathématiques, pas nécessairement relié au monde réel dans lequel nous vivons. Ce monde des idées constitue un monde à part, que l'on peut mettre en parallèle avec le monde des idées de Platon. Tels les artistes, qui chez Platon, ouvrent une porte vers le monde des idées, les mathématiciens permettent à leur manière un accès au monde des idées abstraites. Je trouve cette image importante, notamment en géométrie, où parfois les élèves peinent à distinguer un objet géométrique conceptuel de sa représentation matérielle et souvent imparfaite. La construction du circuit de train, comme les autres constructions, peut montrer l'aspect idéal des courbes étudiées et utilisées (droite, cercles, paraboles) dont on sait qu'elles existent et vérifient les conditions de tangence, avant même de les définir analytiquement ! Ensuite, il faut passer à la construction de la courbe, puis au plan en 2D, puis en 3D et enfin à la réalisation matérielle des rails ; lors de ces passages, du théorique vers le réel, on peut voir s'accroître le côté matériel et nécessairement imprécis. Les courbes et les modèles 2D sont souvent discrétisés, ce qui introduit nécessairement, un écart, certes faible mais non nul, avec la théorie. Pis encore, lors du passage en 3D, on introduit de la « facettisation[6] », ce qui augmente encore l'écart entre les modèles théoriques et les modèles 3D. Enfin, en dernier lieu, la réalisation matérielle des rails est encore plus entachée d'erreurs, inévitables lors du passage de la machine, mais aussi lors de l'introduction d'un jeu nécessaire entre les tenons et les mortaises ; s'il est trop faible, il est impossible d'assembler les rails entre eux et s'il est trop important, l'aspect assemblage parfait sera quelque peu amoindri.

Annexe A. Collaboration future avec Nicolas Pelay et l'association Plaisir Maths

Depuis les ateliers MathsC2+ de 2015, organisés en collaboration avec Nicolas Pelay, je suis en contact avec Nicolas Pelay, de l'association Plaisir Maths (`http://www.plaisir-maths.fr/`) et nous allons tenter ensemble de promouvoir le jeu mais surtout sur son versant pédagogiques et didactique, exactement dans le cadre de cet exposé.

Annexe B. Matériels réalisés et disponibles

Je dispose de différents matériels, créés au cours de ces dernières années :
- Naturellement, en premier lieu, une voire plusieurs boites de rails en bois.
- Un grand poster représentant les carrés auxquels appartiennent ces rails en bois peut aussi faciliter la construction de grands circuits ou la visualisation du fait que chaque rail en bois est inscrit dans un carré.
- Des cartes en carton ou en plexiglas, de taille réduite ; chacune d'elles, de forme carré, représente le carré de base et le rail correspondant. Ces cartes sont manipulées beaucoup plus rapidement que les rails en bois et permettent donc de simuler rapidement des plans de circuits.
- Quelques logiciels ont été réalisés, permettant de créer par simples clics, des plans de circuits comme celui de la figure 4(b). Ces logiciels et la documentation sont distribués (uniquement pour Windows) et sont disponibles sur
  - `http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/MCRInstaller.exe`
  - `http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/creecircuit.exe`
  - `http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/creecircuitaleat.exe`
  - `http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/dessinecircuit.exe`
  - `http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/mode_emploi_rail_demo.pdf`

Annexe C. Présentations déjà faites ou prévues

Toutes les notions abordées dans cet exposé ont été partiellement abordées dans différentes présentations dont le public était à chaque fois très différent :

(1) Dans le cadre de la semaine[7] « les mathématiques nous transportent ! » un exposé [Bas15b] ludique et grand public a été présenté le samedi 21 mars 2015, à l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon, dans le Vieux Lyon(où la ludothèque de l'APMEP était présente, je crois).

Bien sûr, le circuit a été présent ainsi que les programmes évoqués plus haut.

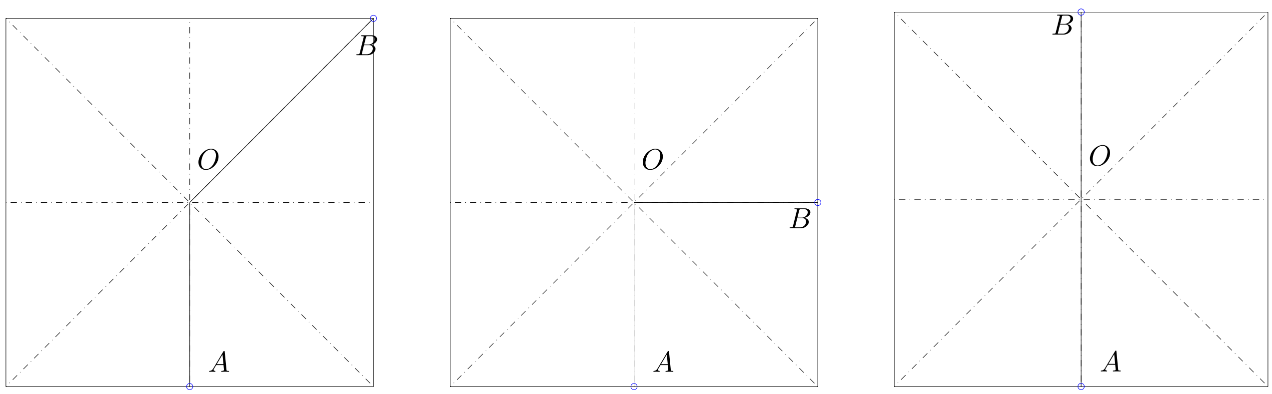
---

6. bien qu'un bon modèle de CAO, comme des courbes ou des surfaces vectorielles, ne doivent pas en contenir justement !

7. `http://math.univ-lyon1.fr/mmi/En-2015-les-mathematiques-nous`

(2) Plus théorique, un exposé [Bas15c] a aussi été fait lors du séminaire de la détente de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique [8] à Lyon, à l'attention essentiellement d'étudiants ou de chercheurs de l'ENS.

(3) En juin 2015, plusieurs ateliers ont été présentés à des élèves de secondes, contenant entre autres ce circuit de train ou la construction de la parabole, dans le cadre d'un stage MathsC2+, organisé en collaboration avec Nicolas Pelay, de l'association Plaisir Maths (`http://www.plaisir-maths.fr/`). Voir [Bas15a] et `http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/index.html`. Cet exposé avait pour but de montrer aux élèves le principe de la construction de ce circuit. La partie pratique avait été posée sous forme de « Jeu du jour : en utilisant le logiciel ou avec les prototypes fournis (30 pièces), seriez-vous capables de déterminer d'autres circuits les plus grands possibles, à 24 ou 30 pièces ? ». Ils avaient pris goût à ce jeu et certains d'entre eux avaient réalisé des circuits en utililisant la quasitotalité des pièces, en jonglant entre rails en bois et les logiciels fournis, ce qui leur permettait de valider la solution. Cette expérience devrait être tentée de nouveau cette année toujours avec Nicolas Pelay et l'association Plaisir Maths [Bas16a ; Bas16b].



(a) (b) (c)

FIGURE 6. Les trois figures à compléter

(4)

Dans un examen de troisième année d'école d'Ingénieur, le calcul de la parabole, grâce à l'interpolation d'hermite a été tenté ; le principe du brevet a été posé comme question bonus et a été compris par quelques étudiants.

Voir les figures 6, 7 et 8 et l'exercice 1 de

`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNB/examMNBA14.pdf`

`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNB/examcorMNBA14.pdf`

ainsi que la plus jolie courbe obtenue

`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNB/examcorMNBA14_exemplecourbe.pdf`.

8. `http://math.univ-lyon1.fr/mmi/-Detente-mathematique-`

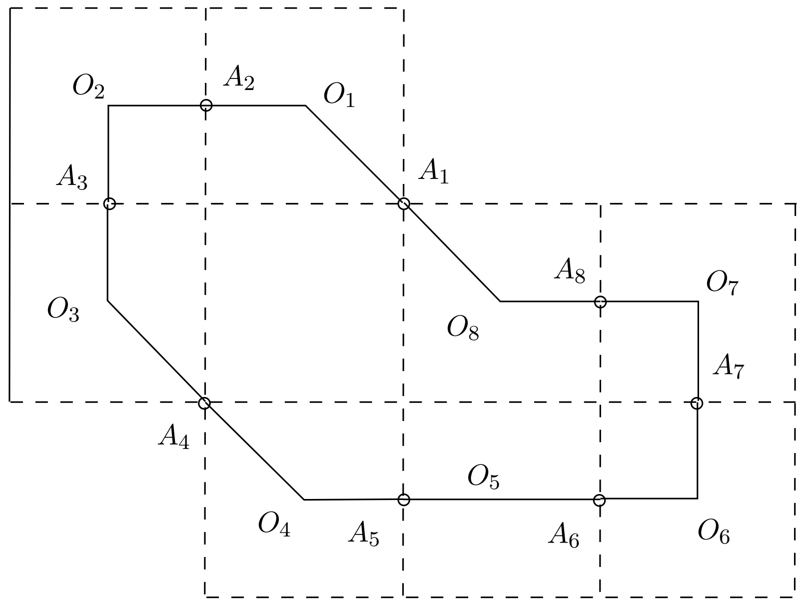


FIGURE 7. La figure à compléter

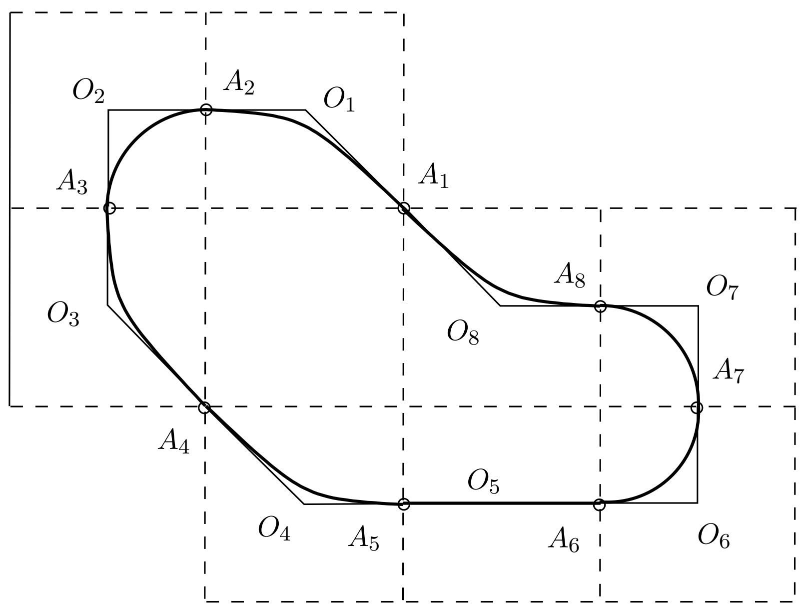


FIGURE 8. La figure complétée

Références

[Bas12] J. BASTIEN. "Circuit apte à guider un véhicule miniature". Brevet FR2990627. UNIVERSITÉ LYON I. Brevet publié sur le site de l'INPI `http://bases-brevets.inpi.fr/fr/document/FR2990627.html?p=6&s=1423127185056&cHash=cfbc2dad6e2e39808596f86b89117583` Voir aussi [Bas13]. 15 mai 2012.

[Bas13] J. Bastien. "Circuit suitable for guiding a miniature vehicle [Circuit apte à guider un véhicule miniature]". Brevet WO2013171170. Université Lyon I. Demande internationale publiée en vertu du traité de coopération en matière de brevets (PCT). Voir http://bases-brevets.inpi.fr/fr/document/WO2013171170.html?p=6&s=1423127405077&cHash=6947975351b6d1cf7dd56d4e749a98bb. 13 mai 2013.

[Bas15a] J. Bastien. *Atelier Maths C2+ : Parabole et effet Magnus au football*. MathC2+ à l'université Lyon I, disponible sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/parabole_effet_magnus.pdf. 2015. 54 pages.

[Bas15b] J. Bastien. *Comment concevoir un circuit de train miniature qui se reboucle toujours bien ?* Transparents présentés lors du Forum des mathématiques 2015 à l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon, disponibles sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_forum_2015.pdf. 2015. 73 pages.

[Bas15c] J. Bastien. *Comment concevoir un circuit de train miniature qui se reboucle toujours bien ? –Deux questions d'algèbre et de dénombrement*. Transparents présentés au « séminaire détente » de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique, Lyon, disponibles sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_MMI_2015.pdf. 2015. 80 pages.

[Bas16a] J. Bastien. *Atelier Maths C2+ : Circuits de trains et paraboles*. MathC2+ à l'université Lyon I, disponible sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/parabole_circuit_train.pdf. 2016. 32 pages.

[Bas16b] J. Bastien. *Conférence Maths C2+ : La modélisation de l'effet Magnus*. MathC2+ à l'université Lyon I, disponible sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/modelisation_magnus.pdf et http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/modelisation_magnus_transparents.pdf. 2016. 16 pages.

[Bas16c] J. Bastien. *Construction and enumeration of circuits capable of guiding a miniature vehicle*. 2016. arXiv :1603.08775.

[Bas16d] J. Bastien. "Construction and enumeration of circuits capable of guiding a miniature vehicle". Dans : *Recreational Mathematics Magazine* (2016). Accepté pour publication. Disponible sur http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/articles_provisoires/enumeration_circuit_JB_2016.pdf.

Centre de Recherche et d'Innovation sur le Sport, U.F.R.S.T.A.P.S., Université Claude Bernard - Lyon 1, 27-29, Bd du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France

E-mail address: jerome.bastien@univ-lyon1.fr