Divers aspects mathématiques d'un circuit de train extensible et modulaire

Journées 2016 de l'APMEP, Lyon

Jérôme Bastien

Centre de Recherche et d'Innovation sur le Sport – Université Lyon I

Dimanche 23 Octobre 2016

Sommaire

Résumé

Quelles sont les propriétés mathématiques des rails d'un circuit de train ? Ce jeu s'appuie sur de nombreuses propriétés géométriques, utilisées au collège et au lycée et constitue un outil constructif pour les élèves. Il est possible de construire un très grand nombre de circuits de sorte que les boucles se referment toujours parfaitement.

Sommaire

Consignes

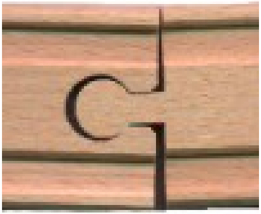
À partir des rails prototypes réaliser au hasard une boucle avec les deux seules consignes suivantes :

- Le circuit doit se refermer ;
- Unique règle de connexion : les extrémités de deux rails contigus doivent être du même type (absence ou présence simultanée de pastille de couleur).

Brevet délivré

J. Bastien. "Circuit apte à guider un véhicule miniature". Brevet FR2990627. Université Lyon I. Brevet publié sur le site de l'INPI `http://bases-brevets.inpi.fr/fr/document/FR2990627.html?p=6&s=1423127185056&cHash=cfbc2dad6e2e39808596f86b89117583` Voir aussi [Bas13]. 15 mai 2012

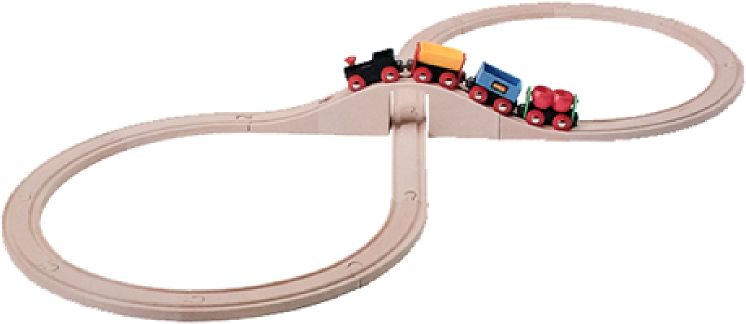
Le «Vario system»



Voir http://www.woodenrailway.info/track/trackmath.html

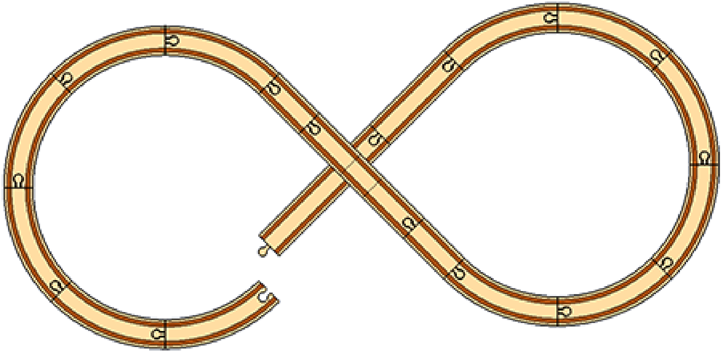
Le «Vario system»

« Note how the photograph from the BRIO 1996 catalog shows a perfect fit » :

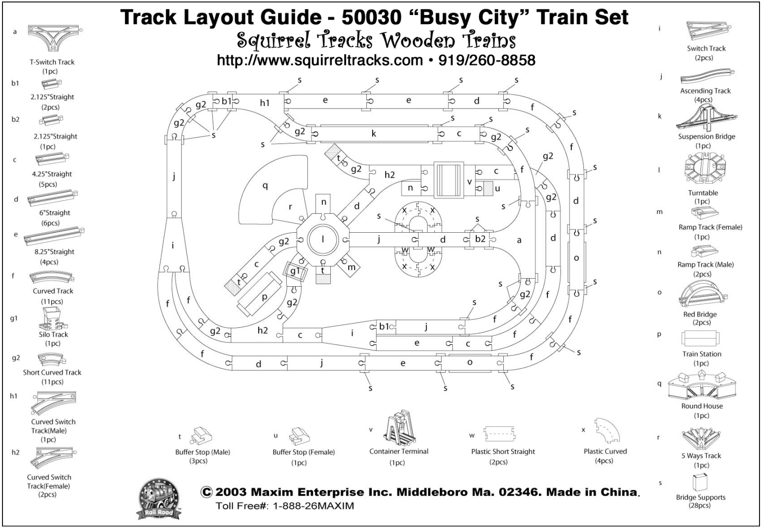


Le «Vario system»

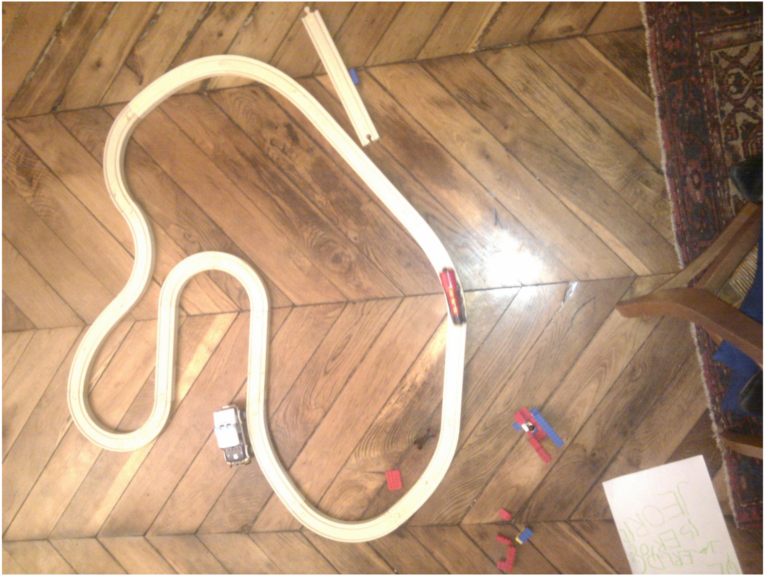
« But when you actually lay this track out usinng a CAD system, you get a much different story. The track doesn't meet, and it's also not aligned with the center of the viaduct. The Vario System is what makes this layout possible. » :



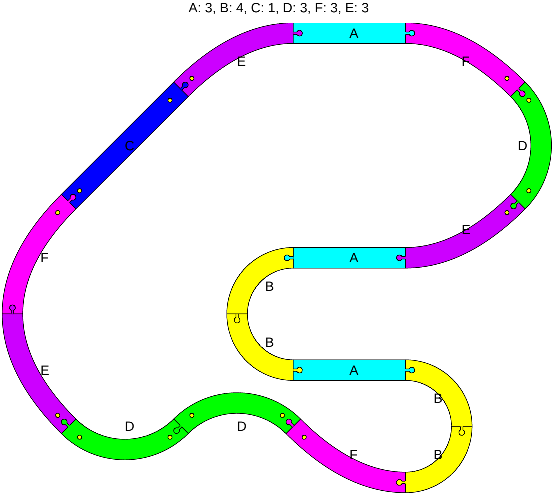
Un exemple de plan de train existant



Un exemple de circuit réalisé (A)



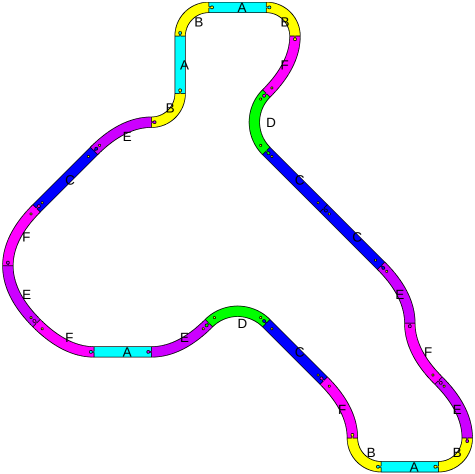
Le plan associé (A)



Un exemple de circuit réalisé (B)

Le plan associé (B)

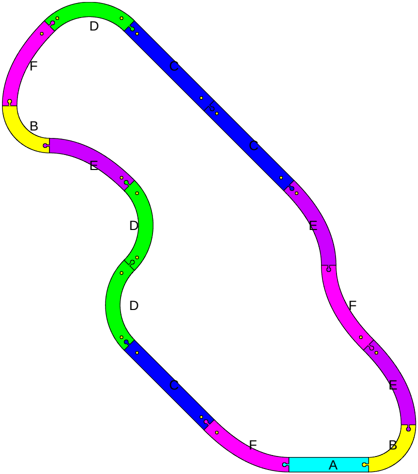
A: 4, B: 5, C: 4, D: 2, F: 5, E: 5



Un exemple de circuit réalisé (C)

Le plan associé (C)

A: 1, B: 2, C: 3, D: 3, F: 3, E: 3



Ce que permet le brevet

L'invention propose un circuit ou un ensemble de pièces de guidage qui :

- permet la réalisation d'un grand nombre de circuits fermés à partir du même ensemble de pièces,
- utilise un minimum de pièces de guidage différentes,
- garantit qu'il est toujours possible de refermer simplement le circuit sur lui-même.

Typiquement, l'invention concerne le domaine des circuits de trains pour enfants. Elle peut concerner également le domaine des circuits de petites voitures ou similaires.

Ce que permet le brevet

L'invention propose un circuit ou un ensemble de pièces de guidage qui :

- permet la réalisation d'un grand nombre de circuits fermés à partir du même ensemble de pièces,
- utilise un minimum de pièces de guidage différentes,
- garantit qu'il est toujours possible de refermer simplement le circuit sur lui-même.

Typiquement, l'invention concerne le domaine des circuits de trains pour enfants. Elle peut concerner également le domaine des circuits de petites voitures ou similaires.

Ce que permet le brevet

L'invention propose un circuit ou un ensemble de pièces de guidage qui :

- permet la réalisation d'un grand nombre de circuits fermés à partir du même ensemble de pièces,
- utilise un minimum de pièces de guidage différentes,
- garantit qu'il est toujours possible de refermer simplement le circuit sur lui-même.

Typiquement, l'invention concerne le domaine des circuits de trains pour enfants. Elle peut concerner également le domaine des circuits de petites voitures ou similaires.

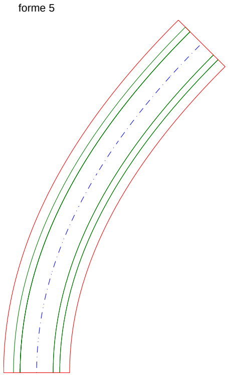
Ce que permet le brevet

L'invention propose un circuit ou un ensemble de pièces de guidage qui :

- permet la réalisation d'un grand nombre de circuits fermés à partir du même ensemble de pièces,
- utilise un minimum de pièces de guidage différentes,
- garantit qu'il est toujours possible de refermer simplement le circuit sur lui-même.

Typiquement, l'invention concerne le domaine des circuits de trains pour enfants. Elle peut concerner également le domaine des circuits de petites voitures ou similaires.

Idées de base



On se concentre sur la trajectoire décrite par la locomotive par exemple, soit encore sur la ligne médiane, tracée en pointillé sur la figure.

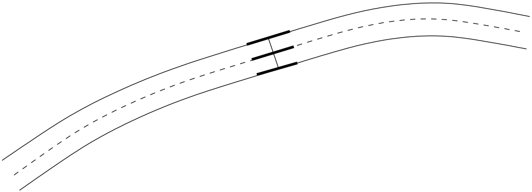
Idées de base

- On cherche à inscrire chacune de ces courbes dans une forme simple qui permette de paver le plan ;
- De plus, il est nécessaire qu'une fois le pavage réalisé, la courbe construite soit de classe $\mathcal{C}^1$.

Idées de base

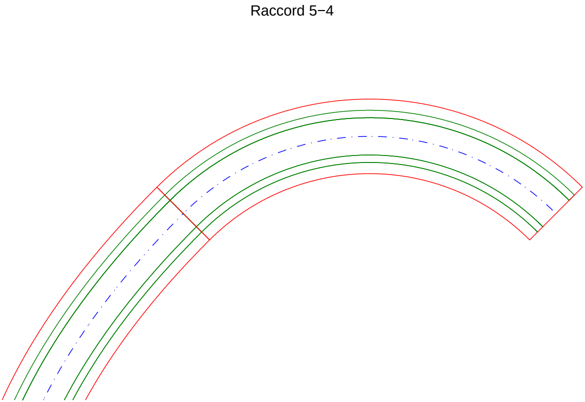
- On cherche à inscrire chacune de ces courbes dans une forme simple qui permette de paver le plan ;
- De plus, il est nécessaire qu'une fois le pavage réalisé, la courbe construite soit de classe $\mathcal{C}^1$.

Pourquoi $\mathcal{C}^1$?



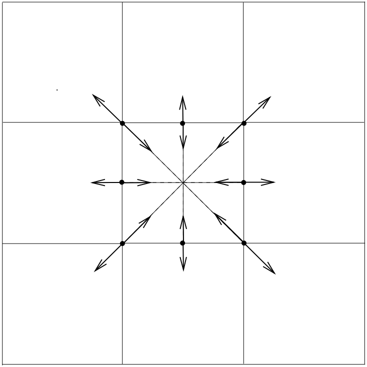
La ligne médiane est $\mathcal{C}^1$ ce qui assure la continuité de la vitesse du véhicule empruntant le circuit.
Mais aussi, les bords des rails sont perpendiculaires à cette ligne médiane, donc parallèles entre eux, ce qui assure l'encastrement parfait de deux rails contigus !

Pourquoi $\mathcal{C}^1$?



Exemple de bon raccord.

Utilisation du pavage carré du plan et des huits points associés



Si on représente le carré de base et ses huit voisins, huit points particuliers apparaissent : les quatre sommets du carrés et les quatre milieux de cotés.

Utilisation du pavage carré du plan et des huits points associés

On imposera donc à chaque portion de la trajectoire :

- d'être contenue dans le carré,
- de débuter sur un sommet du carré ou un milieu d'un côté du carré en un point A et de se terminer sur un autre sommet du carré ou un milieu d'un autre côté du carré en un point B,
- d'être tangente en A et en B aux droites reliant respectivement le centre du carré aux points A et B.

Utilisation du pavage carré du plan et des huits points associés

On imposera donc à chaque portion de la trajectoire :

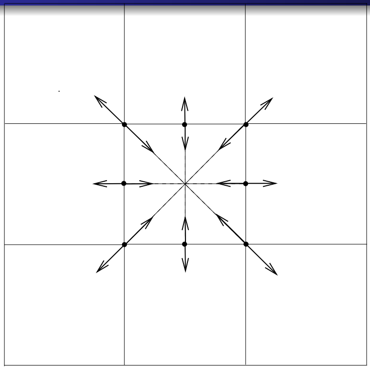
- d'être contenue dans le carré,
- de débuter sur un sommet du carré ou un milieu d'un côté du carré en un point A et de se terminer sur un autre sommet du carré ou un milieu d'un autre côté du carré en un point B,
- d'être tangente en A et en B aux droites reliant respectivement le centre du carré aux points A et B.

Utilisation du pavage carré du plan et des huits points associés

On imposera donc à chaque portion de la trajectoire :

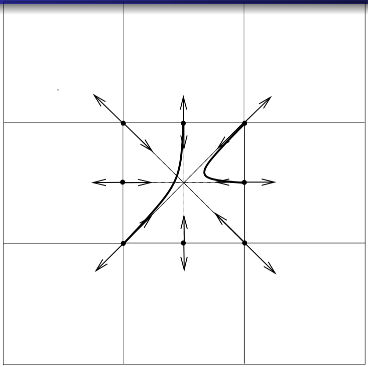
- d'être contenue dans le carré,
- de débuter sur un sommet du carré ou un milieu d'un côté du carré en un point A et de se terminer sur un autre sommet du carré ou un milieu d'un autre côté du carré en un point B,
- d'être tangente en A et en B aux droites reliant respectivement le centre du carré aux points A et B.

Utilisation du pavage carré du plan et des huits points associés



Si on représente le carré de base et ses huit voisins, huit points particuliers apparaissent : les quatre sommets du carrés et les quatre milieux de cotés.

Utilisation du pavage carré du plan et des huits points associés



Deux exemples de courbe

Ainsi, si une boucle est refermée, la trajectoire est assurée d'être continue et dérivable au premier et dernier point et l'encastrement est donc parfait !

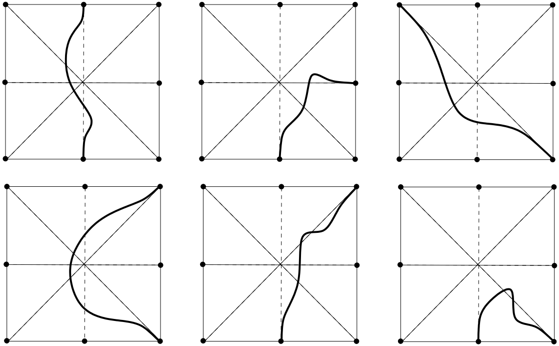
Nombre de courbes nécessaires

- Chacun des huits points (sommets ou milieux) doit être relié une fois seulement aux autres ! Donc, il faut $C_8^2 = 28$ courbes, ce qui est beaucoup trop élevé si elles sont toutes différentes.
- Si on enlève les 8 trajets reliant chaque point à son voisin immédiat, il ne faut plus que $28 - 8 = 20$ courbes.

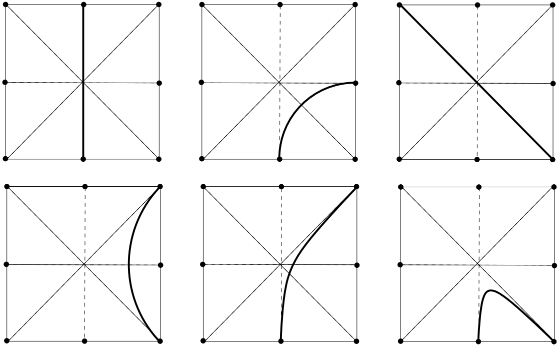
Nombre de courbes nécessaires

- Chacun des huits points (sommets ou milieux) doit être relié une fois seulement aux autres ! Donc, il faut $C_8^2 = 28$ courbes, ce qui est beaucoup trop élevé si elles sont toutes différentes.
- Si on enlève les 8 trajets reliant chaque point à son voisin immédiat, il ne faut plus que $28 - 8 = 20$ courbes.

Six courbes quelconques



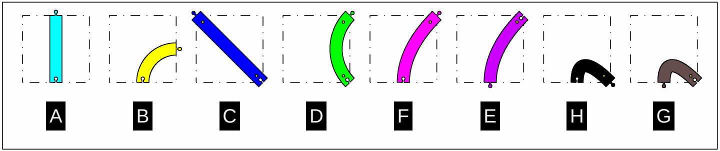
Les six courbes choisies



Les six courbes choisies

- Deux segments de droites ;
- Deux quarts de cercles ;
- Deux autres courbes, définies par deux points et deux tangentes.

Les six types de rails construits

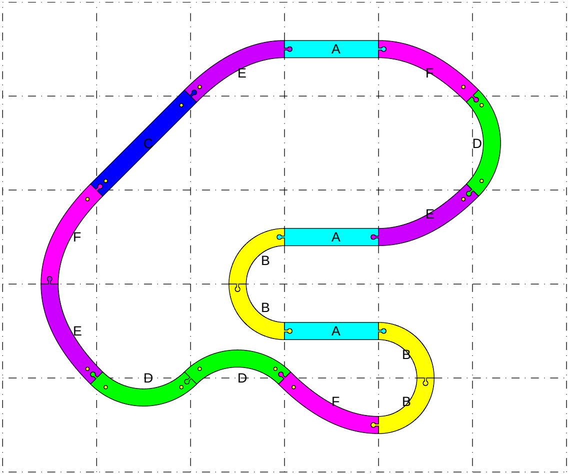


Fabrication finale des prototypes

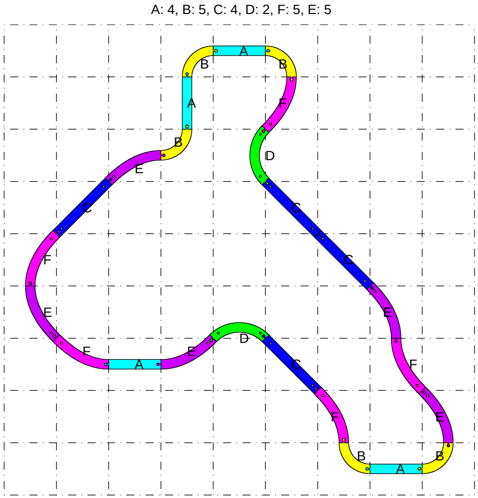
Les prototypes en bois ont été réalisés par l'entreprise AS'Bois à Saint-Julien sur Suran (Jura, `http://www.as-bois.fr`).

Retour sur le circuit (A)

A: 3, B: 4, C: 1, D: 3, F: 3, E: 3

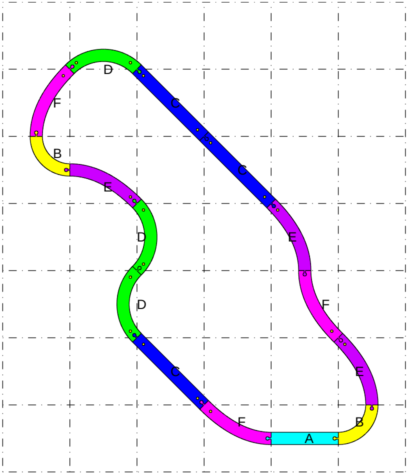


Retour sur le circuit (B)



Retour sur le circuit (C)

A: 1, B: 2, C: 3, D: 3, F: 3, E: 3



Sommaire

Notions à introduire

- Continuité et tangence ;
- Vitesse, en lien avec le circuit et la locomotive !

Problème des « tchin »

- N personnes trinquent ensemble, chacune d'elles trinquant une fois seulement avec chacune des autres. Combien de « tchin » en tout.
-
  - Chaque personne trinque avec les $N-1$ autres personnes ;
  - On a donc $N \times (N-1)$ « tchin », à diviser par deux, puisque dans ce raisonnement, chaque « tchin » est compté deux fois.
  - Le résultat est donc $N(N-1)/2 = C_N^2 = \binom{N}{2}$ « tchin ».
- Ici, $N = 8$, puisque chacun des huits points (sommets ou milieux) doit être relié une fois seulement aux autres ! Donc, il faut $8 \times 7/2 = 4 \times 7 = 28$, courbes, ce qui est beaucoup trop élevé si elles sont toutes différentes.

Problème des « tchin »

- N personnes trinquent ensemble, chacune d'elles trinquant une fois seulement avec chacune des autres. Combien de « tchin » en tout.
-
  - Chaque personne trinque avec les $N-1$ autres personnes ;
  - On a donc $N \times (N-1)$ « tchin », à diviser par deux, puisque dans ce raisonnement, chaque « tchin » est compté deux fois.
  - Le résultat est donc $N(N-1)/2 = C_N^2 = \binom{N}{2}$ « tchin ».
- Ici, $N = 8$, puisque chacun des huits points (sommets ou milieux) doit être relié une fois seulement aux autres ! Donc, il faut $8 \times 7/2 = 4 \times 7 = 28$, courbes, ce qui est beaucoup trop élevé si elles sont toutes différentes.

Problème des « tchin »

- N personnes trinquent ensemble, chacune d'elles trinquant une fois seulement avec chacune des autres. Combien de « tchin » en tout.
-
  - Chaque personne trinque avec les $N-1$ autres personnes ;
  - On a donc $N \times (N-1)$ « tchin », à diviser par deux, puisque dans ce raisonnement, chaque « tchin » est compté deux fois.
  - Le résultat est donc $N(N-1)/2 = C_N^2 = \binom{N}{2}$ « tchin ».
- Ici, $N = 8$, puisque chacun des huits points (sommets ou milieux) doit être relié une fois seulement aux autres ! Donc, il faut $8 \times 7/2 = 4 \times 7 = 28$, courbes, ce qui est beaucoup trop élevé si elles sont toutes différentes.

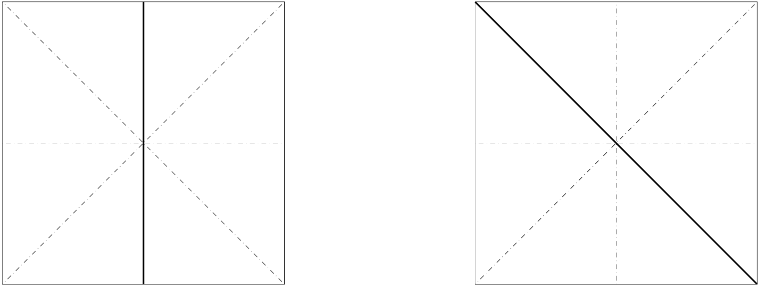
Problème des « tchin »

- N personnes trinquent ensemble, chacune d'elles trinquant une fois seulement avec chacune des autres. Combien de « tchin » en tout.
-
  - Chaque personne trinque avec les $N-1$ autres personnes ;
  - On a donc $N \times (N-1)$ « tchin », à diviser par deux, puisque dans ce raisonnement, chaque « tchin » est compté deux fois.
  - Le résultat est donc $N(N-1)/2 = C_N^2 = \binom{N}{2}$ « tchin ».
- Ici, $N = 8$, puisque chacun des huits points (sommets ou milieux) doit être relié une fois seulement aux autres ! Donc, il faut $8 \times 7/2 = 4 \times 7 = 28$, courbes, ce qui est beaucoup trop élevé si elles sont toutes différentes.

Problème des « tchin »

- N personnes trinquent ensemble, chacune d'elles trinquant une fois seulement avec chacune des autres. Combien de « tchin » en tout.
-
  - Chaque personne trinque avec les $N-1$ autres personnes ;
  - On a donc $N \times (N-1)$ « tchin », à diviser par deux, puisque dans ce raisonnement, chaque « tchin » est compté deux fois.
  - Le résultat est donc $N(N-1)/2 = C_N^2 = \binom{N}{2}$ « tchin ».
- Ici, $N = 8$, puisque chacun des huits points (sommets ou milieux) doit être relié une fois seulement aux autres ! Donc, il faut $8 \times 7/2 = 4 \times 7 = 28$, courbes, ce qui est beaucoup trop élevé si elles sont toutes différentes.

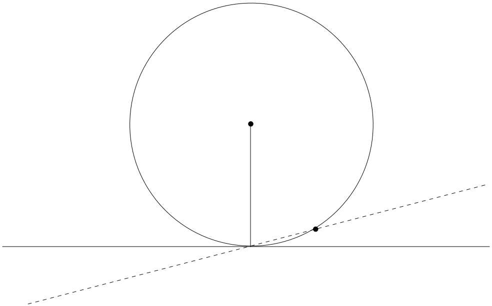
Les cas les plus simples : les deux rails droits



Les deux courbes sont des segments de droites, qui se superposent à leur tangente.

$\Longrightarrow$ Deux rails droits de longueurs respectives $c = 21.8$ et $\sqrt{2} \times 21.8$

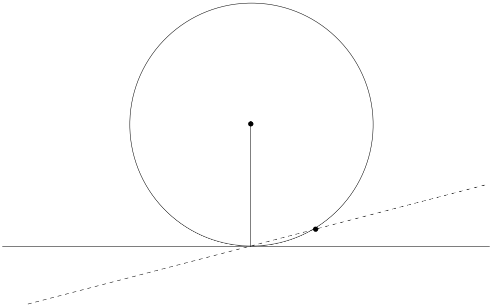
Rappel sur la tangente à un cercle



La seule droite qui ne coupe le cercle qu'en un seul point est la droite passant par ce point et perpendiculaire au rayon.

La droite et le cercle « se touchent » en un seul point. Le mot tangent vient du latin « toucher » (Toccare en italien).

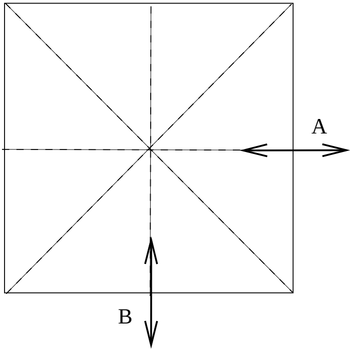
Rappel sur la tangente à un cercle



La seule droite qui ne coupe le cercle qu'en un seul point est la droite passant par ce point et perpendiculaire au rayon.

La droite et le cercle « se touchent » en un seul point. Le mot tangent vient du latin « toucher » (Toccare en italien).

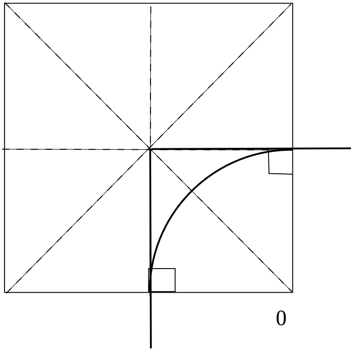
Un autre cas : un rail circulaire



Trouver un cercle passant par A et B et tangent en ces points.

Question : est-ce qu'il existe d'autre solution (en forme de cercle) ?

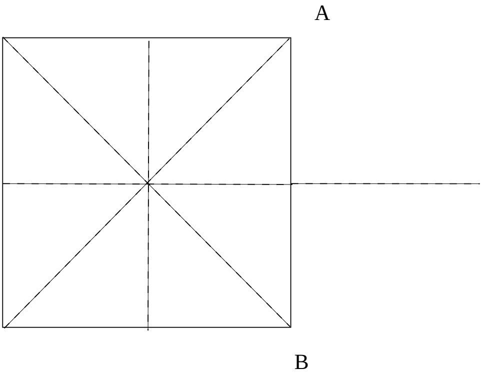
Un autre cas : un rail circulaire



Un cercle de centre 0, de rayon $c/2$.

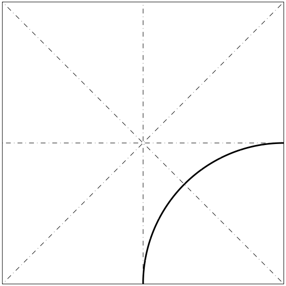
Question : est-ce qu'il existe d'autre solution (en forme de cercle) ?

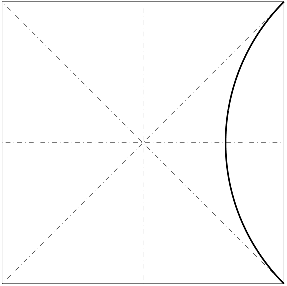
Application : un autre arc de cercle



Trouver un cercle tangent aux points A et B aux droites données.

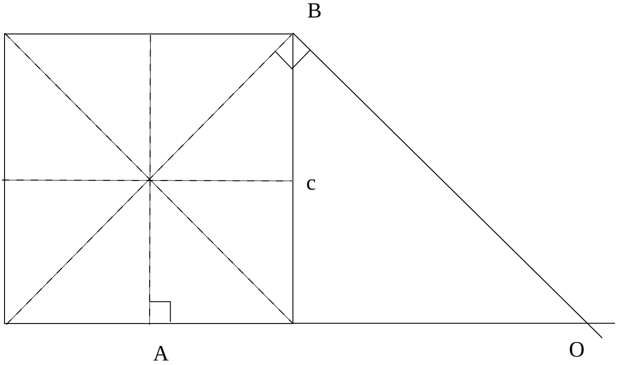
Les rails circulaires obtenus





$\Longrightarrow$ Deux rails circulaires de rayons respectifs $21.8/2$ et $\sqrt{2}/2 \times 21.8$

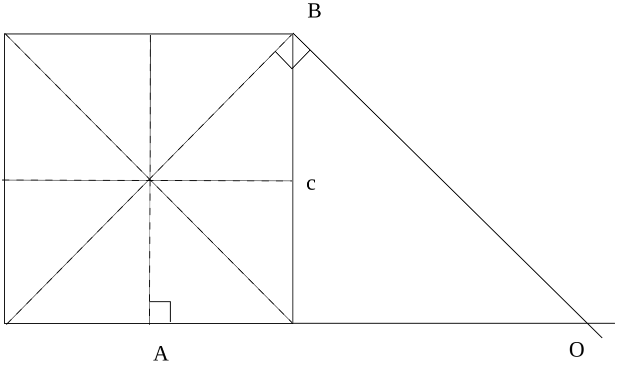
Autre application : rercherche d'un autre arc de cercle



Si le cercle existe, tangent aux points A et B aux droites données, son centre ne peut qu'être qu'en O. Le rayon serait alors égal à $OA = OB$. Or $OA = c + c/2 = 3/2c$ et $0B = \sqrt{2}c$.

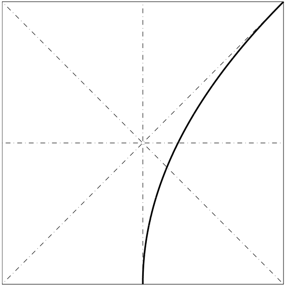
On a $3/2 \neq \sqrt{2}$!

Autre application : rercherche d'un autre arc de cercle



Si le cercle existe, tangent aux points A et B aux droites données, son centre ne peut qu'être qu'en O. Le rayon serait alors égal à $OA = OB$. Or $OA = c + c/2 = 3/2c$ et $0B = \sqrt{2}c$.
On a $3/2 \neq \sqrt{2}$!

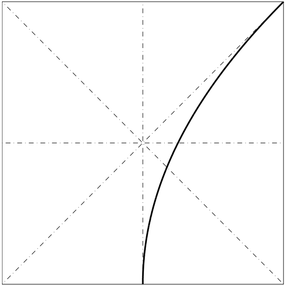
On utilise alors une parabole



Construction admise (existence et unicité) !

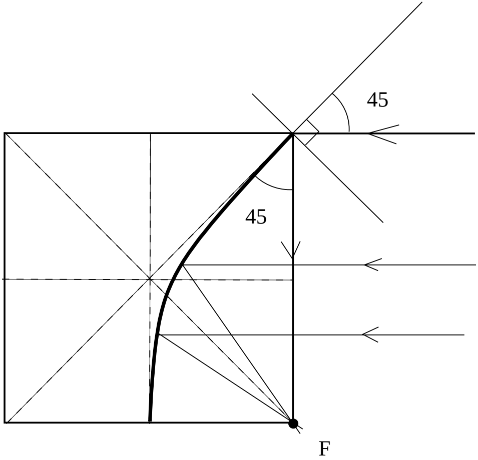
Question : comment vérifier la tangente ?

On utilise alors une parabole



Construction admise (existence et unicité) !
Question : comment vérifier la tangente ?

Vérification de la tangente de la parabole



Puisque l'on a un angle de 45° et que le foyer est connu, la droite en question est bien la tangente !

Construction des pièces 5 et 6 (Parabole)

- En fait, les deux courbes obtenues ainsi sont identiques et égales à une parabole.
- Il existe une unique parabole, définie par deux points et deux droites tangentes (aux points donnés).
- Voir C. Lebossé et C. Hémery. *Géométrie. Classe de Mathématiques (Programmes de 1945)*. Paris : Jacques Gabay, 1997.

passer la construction

Construction des pièces 5 et 6 (Parabole)

- En fait, les deux courbes obtenues ainsi sont identiques et égales à une parabole.
- Il existe une unique parabole, définie par deux points et deux droites tangentes (aux points donnés).
- Voir C. Lebossé et C. Hémery. *Géométrie. Classe de Mathématiques (Programmes de 1945)*. Paris : Jacques Gabay, 1997.

passer la construction

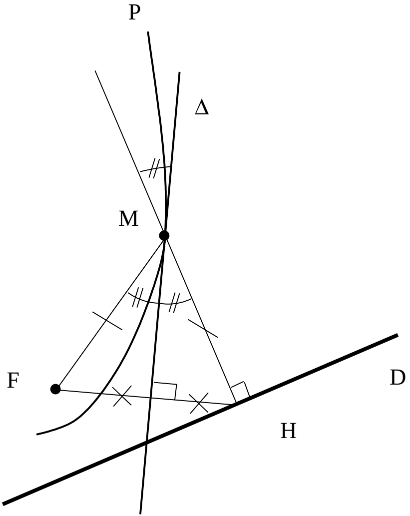
Construction des pièces 5 et 6 (Parabole)

- En fait, les deux courbes obtenues ainsi sont identiques et égales à une parabole.
- Il existe une unique parabole, définie par deux points et deux droites tangentes (aux points donnés).
- Voir C. Lebossé et C. Hémery. *Géométrie. Classe de Mathématiques (Programmes de 1945)*. Paris : Jacques Gabay, 1997.

passer la construction

Construction de la parabole

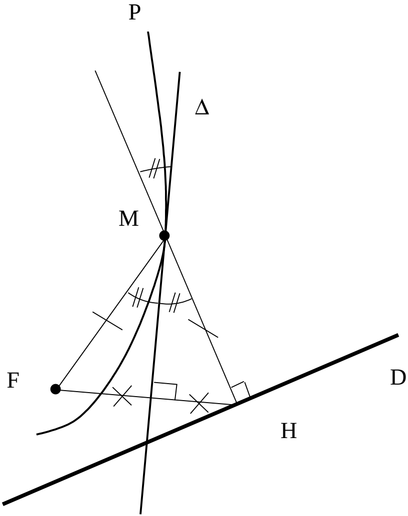
Rappels de la définition et tangente



- La parabole de foyer F et de directrice D est l'ensemble des points M tels que $MH = MF$.
- Tout rayon perpendiculaire à la directrice passe par le foyer, après « réflexion ».
- La tangente Δ à la parabole en M est la médiatrice de $[FH]$.

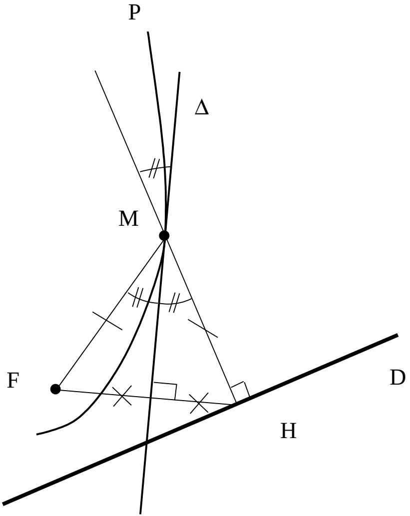
Construction de la parabole

Rappels de la définition et tangente



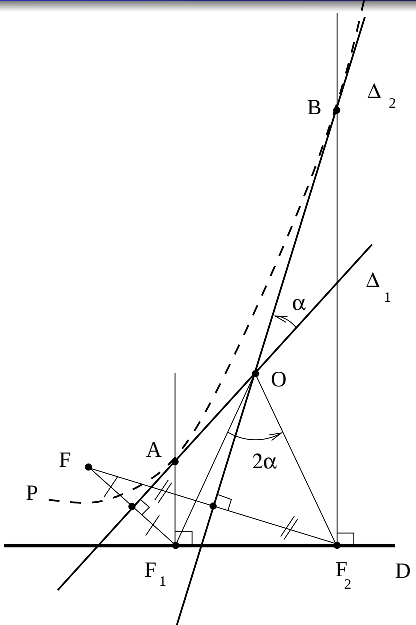
- La parabole de foyer F et de directrice D est l'ensemble des points M tels que $MH = MF$.
- Tout rayon perpendiculaire à la directrice passe par le foyer, après « réflexion ».
- La tangente Δ à la parabole en M est la médiatrice de $[FH]$.

Construction de la parabole
Rappels de la définition et tangente



- La parabole de foyer F et de directrice D est l'ensemble des points M tels que $MH = MF$.
- Tout rayon perpendiculaire à la directrice passe par le foyer, après « réflexion ».
- La tangente Δ à la parabole en M est la médiatrice de $[FH]$.

Construction de la parabole
Condition nécessaire

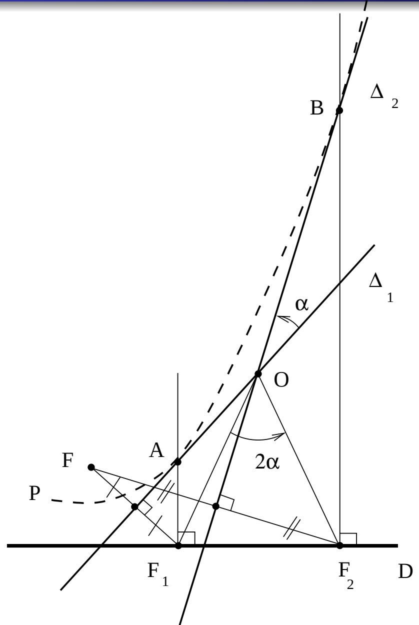


- Δ_1 et Δ_2 sécantes.
- Δ_1 (resp. Δ_2) est la médiatrice de $[FF_1]$ (resp. $[FF_2]$).
- $\Longrightarrow$

$$F_1 = s_{\Delta_1}(F),$$
$$F_2 = s_{\Delta_2}(F),$$
$$F_2 = s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}(F_1) = r_{(O,2\alpha)}(F_1).$$

Construction de la parabole

Condition nécessaire

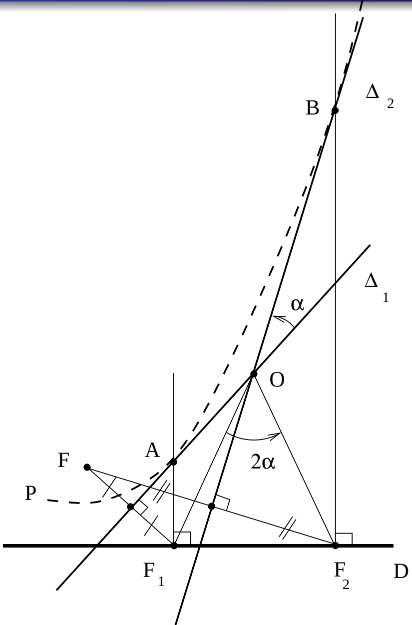


- Δ_1 et Δ_2 sécantes.
- Δ_1 (resp. Δ_2) est la médiatrice de $[FF_1]$ (resp. $[FF_2]$).
- $\Longrightarrow$

$$F_1 = s_{\Delta_1}(F),$$
$$F_2 = s_{\Delta_2}(F),$$
$$F_2 = s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}(F_1) = r_{(O,2\alpha)}(F_1).$$

Construction de la parabole

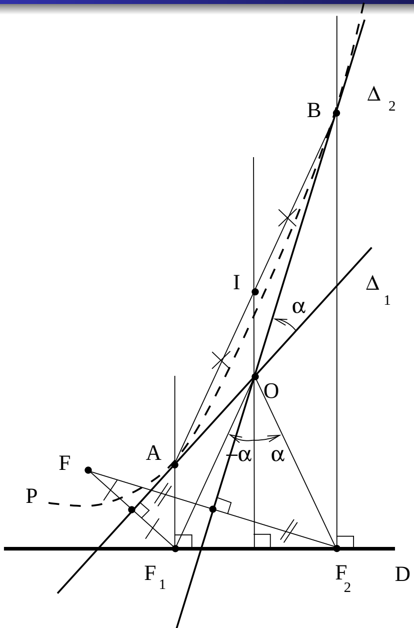
Condition nécessaire



- Δ_1 et Δ_2 sécantes.
- Δ_1 (resp. Δ_2) est la médiatrice de $[FF_1]$ (resp. $[FF_2]$).
- $\Longrightarrow$

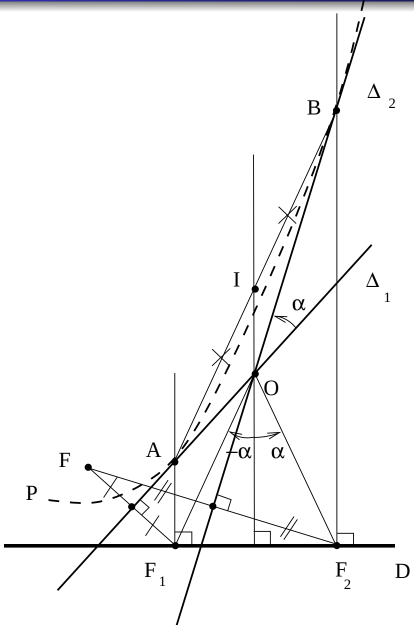
$$F_1 = s_{\Delta_1}(F),$$
$$F_2 = s_{\Delta_2}(F),$$
$$F_2 = s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}(F_1) = r_{(O,2\alpha)}(F_1).$$

Construction de la parabole
Condition nécessaire



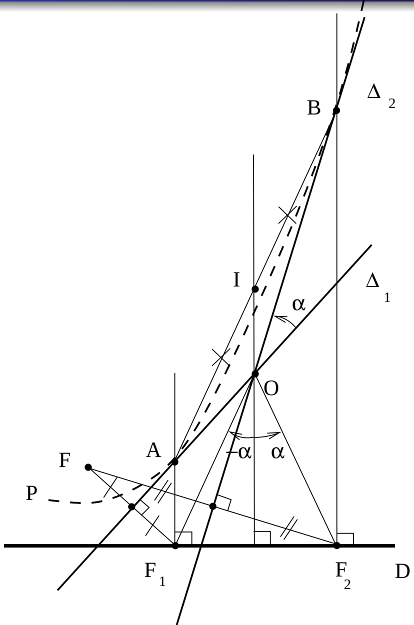
- Soit $I = \mathrm{m}([AB])$.
- (OI) parallèle à (AF_1).
- F_1 est l'unique intersection de la parallèle à (OI) passant par A et de $\Delta = r_{(O,-\alpha)}((OI))$.
- $F = s_{\Delta_1}(F_1)$, unique.
- $D = (F_1F_2)$, unique.

Construction de la parabole
Condition nécessaire



- Soit $I = \mathrm{m}([AB])$.
- (OI) parallèle à (AF_1).
- F_1 est l'unique intersection de la parallèle à (OI) passant par A et de $\Delta = r_{(O,-\alpha)}((OI))$.
- $F = s_{\Delta_1}(F_1)$, unique.
- $D = (F_1F_2)$, unique.

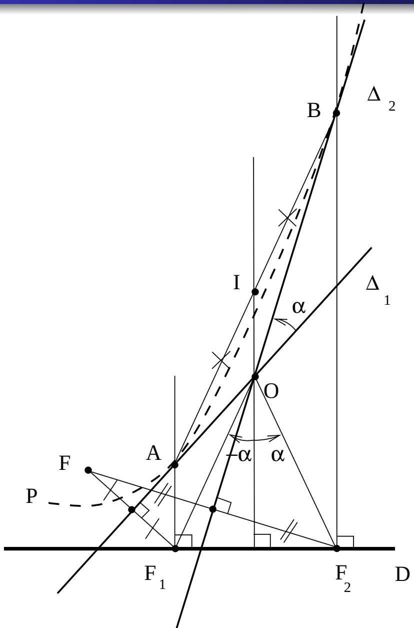
Construction de la parabole
Condition nécessaire



- Soit $I = \text{m}([AB])$.
- (OI) parallèle à (AF_1).
- F_1 est l'unique intersection de la parallèle à (OI) passant par A et de $\Delta = r_{(O,-\alpha)}((OI))$.
- $F = s_{\Delta_1}(F_1)$, unique.
- $D = (F_1F_2)$, unique.

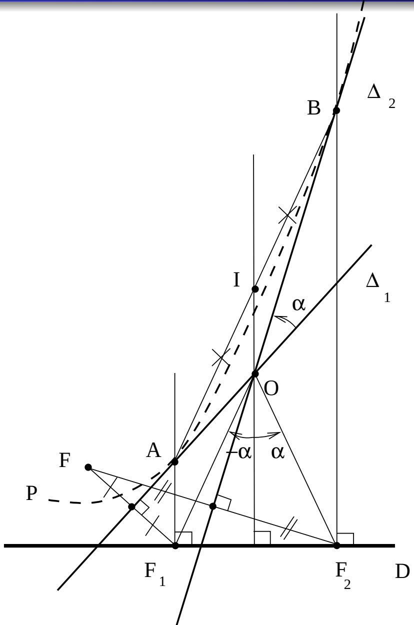
Construction de la parabole

Condition nécessaire



- Soit $I = \mathrm{m}([AB])$.
- (OI) parallèle à (AF_1).
- F_1 est l'unique intersection de la parallèle à (OI) passant par A et de $\Delta = r_{(O,-\alpha)}((OI))$.
- $F = s_{\Delta_1}(F_1)$, unique.
- $D = (F_1F_2)$, unique.

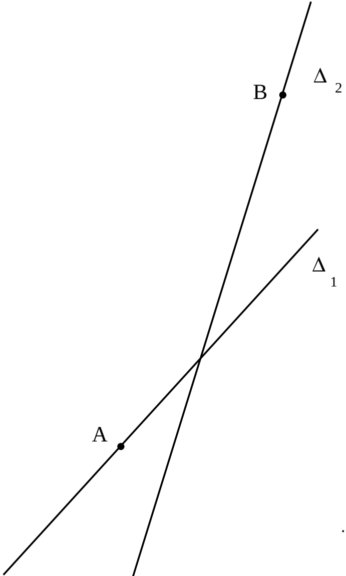
Construction de la parabole
Condition nécessaire



- Soit $I = \mathrm{m}([AB])$.
- (OI) parallèle à (AF_1).
- F_1 est l'unique intersection de la parallèle à (OI) passant par A et de $\Delta = r_{(O,-\alpha)}((OI))$.
- $F = s_{\Delta_1}(F_1)$, unique.
- $D = (F_1F_2)$, unique.

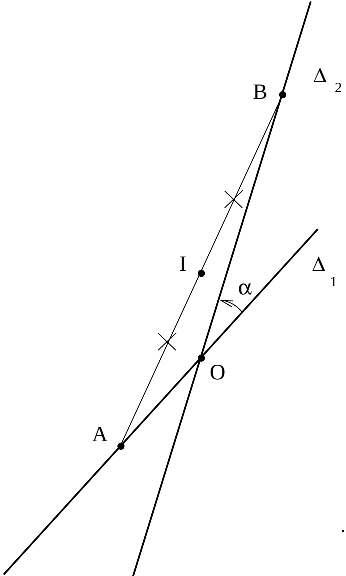
Construction de la parabole

Condition suffisante



Soient A, B et Δ_1, Δ_2, sécantes.

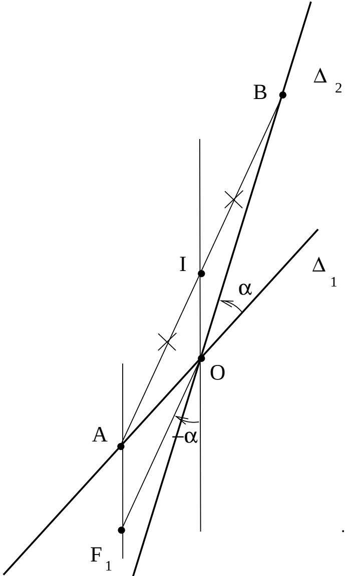
Construction de la parabole
Condition suffisante



Soient $O = \Delta_1 \cap \Delta_2$,
$I = \mathrm{m}([AB])$ et $\alpha = \left(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}\right)$.

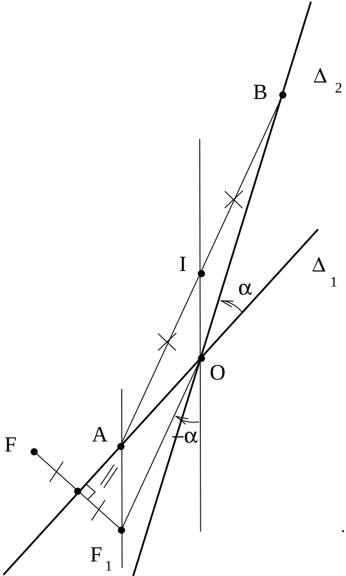
Construction de la parabole

Condition suffisante



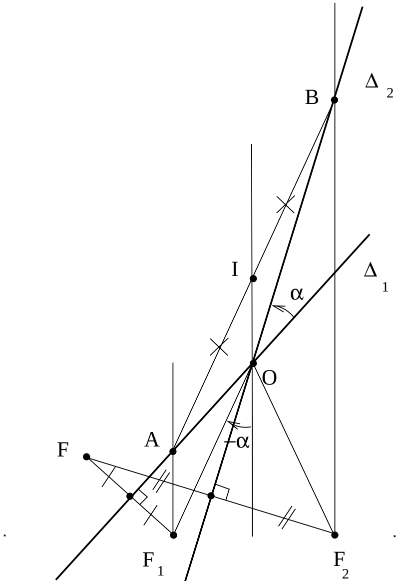
F_1 est l'unique intersection de la parallèle à (OI) passant par A et de $\Delta = r_{(O,-\alpha)}((OI))$.

Construction de la parabole
Condition suffisante



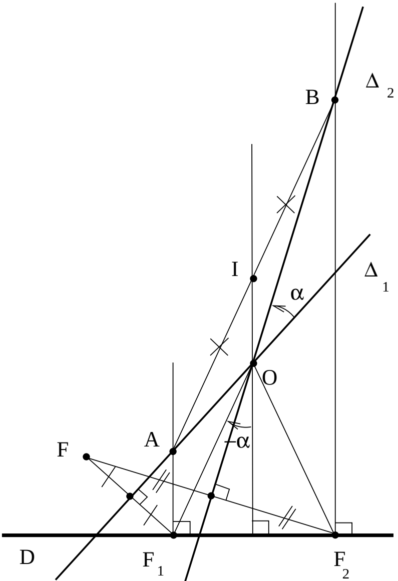
$$F = s_{\Delta_1}(F_1)$$

Construction de la parabole
Condition suffisante



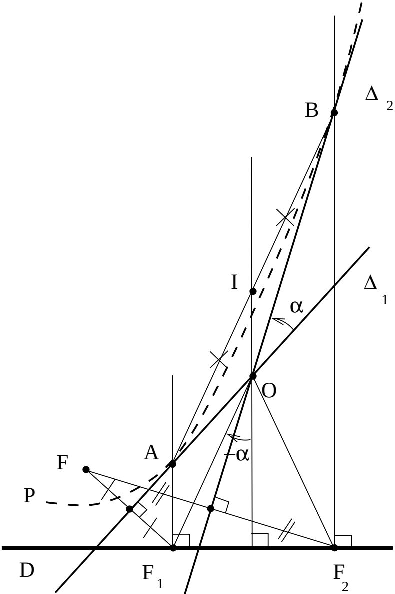
$$F_2 = s_{\Delta_2}(F)$$

Construction de la parabole
Condition suffisante



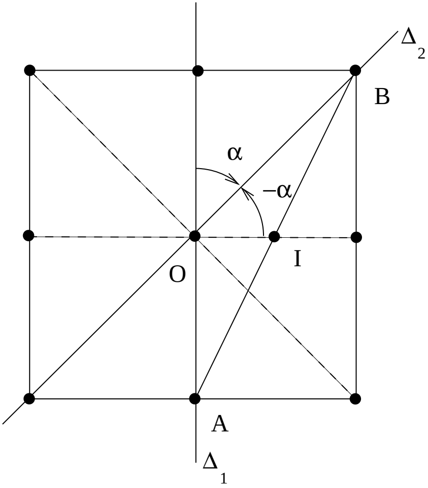
Soit $D = (F_1 F_2)$. De plus $(AF_1) \perp D$ et $(BF_2) \perp D$

Construction de la parabole
Condition suffisante



P est la parabole de foyer F et de directrice D.

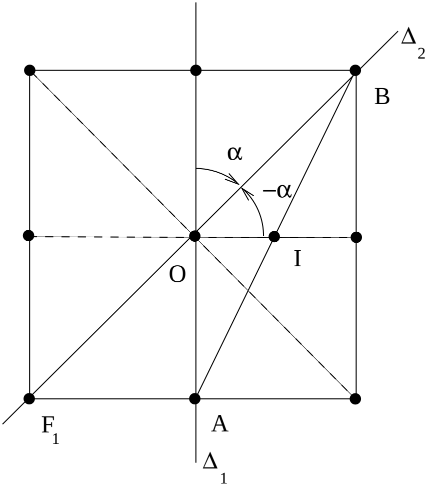
Construction de la parabole (pièce 5)



$$\alpha = -\frac{\pi}{4},$$

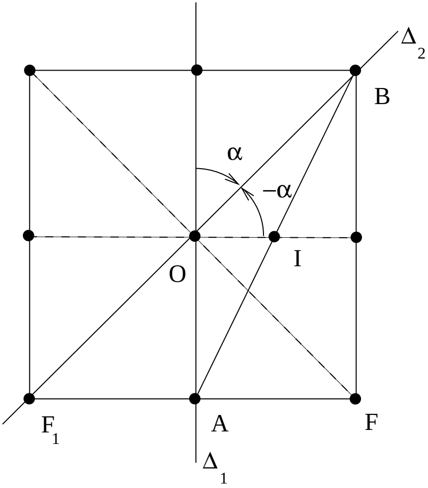
$$O = \Delta_1 \cap \Delta_2, \quad I = \mathrm{m}([AB])$$

Construction de la parabole (pièce 5)



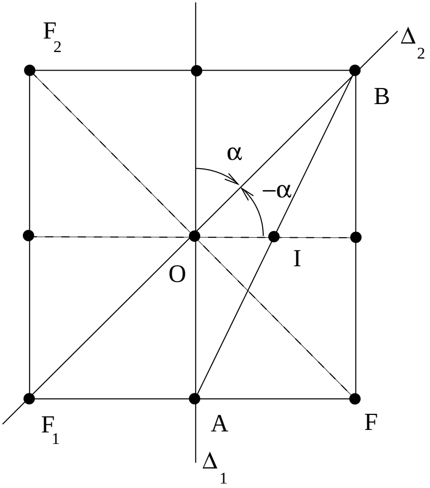
F_1 est l'unique intersection de la parallèle à (OI) passant par A et de $\Delta = r_{(O,\pi/4)}((OI))$.

Construction de la parabole (pièce 5)



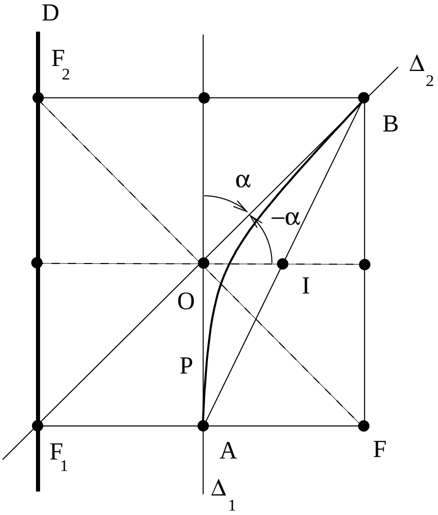
$$F = s_{\Delta_1}(F_1)$$

Construction de la parabole (pièce 5)



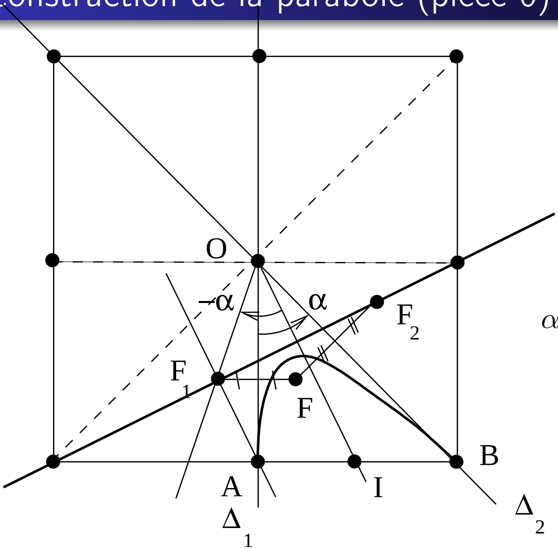
$$F_2 = s_{\Delta_2}(F)$$

Construction de la parabole (pièce 5)



P est la parabole de foyer F et de directrice $D = (F_1 F_2)$.

Construction de la parabole (pièce 6)



$\alpha = \frac{\pi}{4}$

revenir au début de la construction

Construction des pièces 5 et 6 (Bézier)

- Courbes de Bézier définie par $n+1$ points de contrôle du plan, P_0 à P_n. (Presque !) les mêmes que dans les logiciels de dessin.
- $\overrightarrow{P_0P_1}$ est tangent à la courbe en P_0 et $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ est tangent à la courbe en P_n.
- Elle est incluse dans l'enveloppe convexe des points P_i.

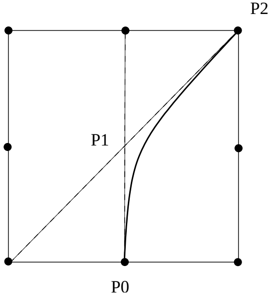
Construction des pièces 5 et 6 (Bézier)

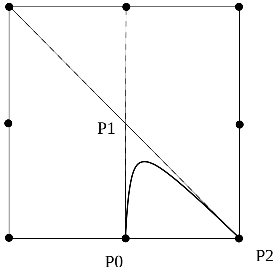
- Courbes de Bézier définie par $n+1$ points de contrôle du plan, P_0 à P_n. (Presque !) les mêmes que dans les logiciels de dessin.
- $\overrightarrow{P_0P_1}$ est tangent à la courbe en P_0 et $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ est tangent à la courbe en P_n.
- Elle est incluse dans l'enveloppe convexe des points P_i.

Construction des pièces 5 et 6 (Bézier)

- Courbes de Bézier définie par $n+1$ points de contrôle du plan, P_0 à P_n. (Presque !) les mêmes que dans les logiciels de dessin.
- $\overrightarrow{P_0P_1}$ est tangent à la courbe en P_0 et $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ est tangent à la courbe en P_n.
- Elle est incluse dans l'enveloppe convexe des points P_i.

Construction des pièces 5 et 6 (Bézier)





Courbe de Bézier d'ordre $n = 2$, définie par trois points de contrôle P_0, P_1 et P_2, passant par P_0 et P_2, dont les dérivées en ces points sont portées par $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Retour aux 28 « tchin »

- On a dénombré 6 courbes sur les 28 nécessaires et le compte n'y est pas !
- Heureusement, les pièces peuvent être déplacées, voire retournées et interviennent alors les huit isométries qui laissent invariant notre carré de base.
- Deux seules suffisent : une rotation de centre le centre du carré et d'angle 45° et une symétrie par rapport à une des médiatrices (groupes engendré).
- Une isométrie directe traduit un déplacement par rotation et translation tandis qu'une isométrie indirecte fait intervenir en plus une reflexion (donc un « retournement » de la pièce).
- Question : pourquoi la dernière pièce est construite en deux types, contrairement aux pièces droites et circulaires ?

Retour aux 28 « tchin »

- On a dénombré 6 courbes sur les 28 nécessaires et le compte n'y est pas !
- Heureusement, les pièces peuvent être déplacées, voire retournées et interviennent alors les huit isométries qui laissent invariant notre carré de base.
- Deux seules suffisent : une rotation de centre le centre du carré et d'angle 45° et une symétrie par rapport à une des médiatrices (groupes engendré).
- Une isométrie directe traduit un déplacement par rotation et translation tandis qu'une isométrie indirecte fait intervenir en plus une reflexion (donc un « retournement » de la pièce).
- Question : pourquoi la dernière pièce est construite en deux types, contrairement aux pièces droites et circulaires ?

Retour aux 28 « tchin »

- On a dénombré 6 courbes sur les 28 nécessaires et le compte n'y est pas !
- Heureusement, les pièces peuvent être déplacées, voire retournées et interviennent alors les huit isométries qui laissent invariant notre carré de base.
- Deux seules suffisent : une rotation de centre le centre du carré et d'angle 45° et une symétrie par rapport à une des médiatrices (groupes engendré).
- Une isométrie directe traduit un déplacement par rotation et translation tandis qu'une isométrie indirecte fait intervenir en plus une reflexion (donc un « retournement » de la pièce).
- Question : pourquoi la dernière pièce est construite en deux types, contrairement aux pièces droites et circulaires ?

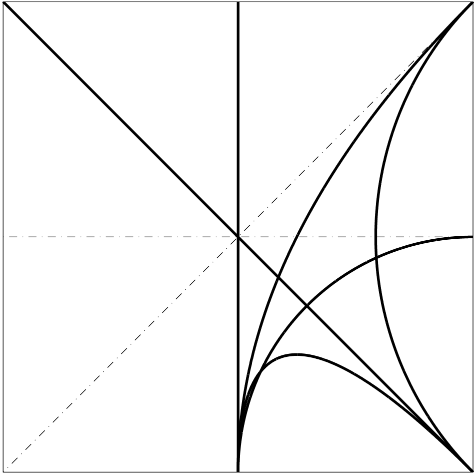
Retour aux 28 « tchin »

- On a dénombré 6 courbes sur les 28 nécessaires et le compte n'y est pas !
- Heureusement, les pièces peuvent être déplacées, voire retournées et interviennent alors les huit isométries qui laissent invariant notre carré de base.
- Deux seules suffisent : une rotation de centre le centre du carré et d'angle 45° et une symétrie par rapport à une des médiatrices (groupes engendré).
- Une isométrie directe traduit un déplacement par rotation et translation tandis qu'une isométrie indirecte fait intervenir en plus une reflexion (donc un « retournement » de la pièce).
- Question : pourquoi la dernière pièce est construite en deux types, contrairement aux pièces droites et circulaires ?

Retour aux 28 « tchin »

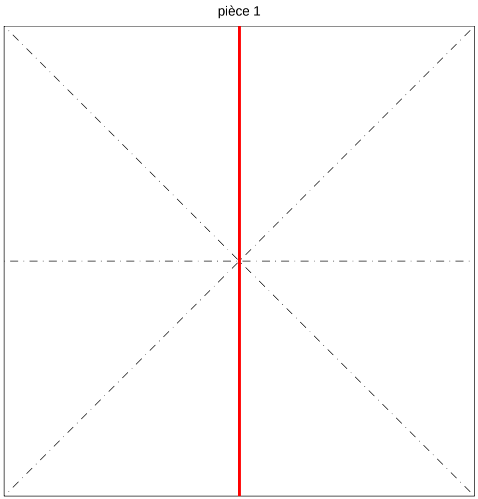
- On a dénombré 6 courbes sur les 28 nécessaires et le compte n'y est pas !
- Heureusement, les pièces peuvent être déplacées, voire retournées et interviennent alors les huit isométries qui laissent invariant notre carré de base.
- Deux seules suffisent : une rotation de centre le centre du carré et d'angle 45° et une symétrie par rapport à une des médiatrices (groupes engendré).
- Une isométrie directe traduit un déplacement par rotation et translation tandis qu'une isométrie indirecte fait intervenir en plus une reflexion (donc un « retournement » de la pièce).
- Question : pourquoi la dernière pièce est construite en deux types, contrairement aux pièces droites et circulaires ?

Ensemble des courbes retenues

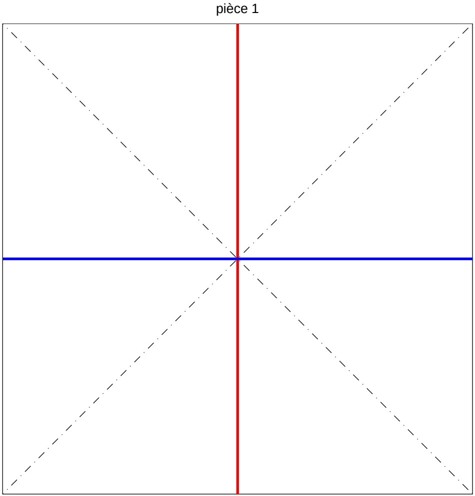


▸ passer les figures

Images de ces courbes par les isométries

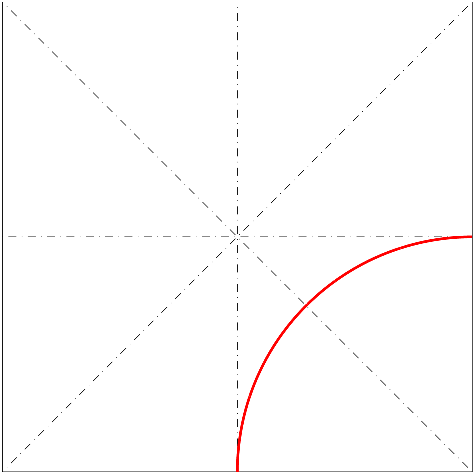


Images de ces courbes par les isométries



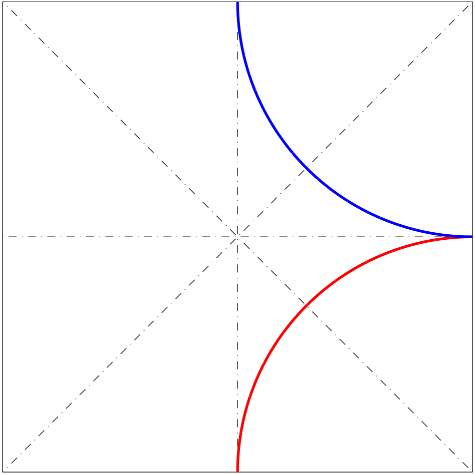
Images de ces courbes par les isométries

pièce 2



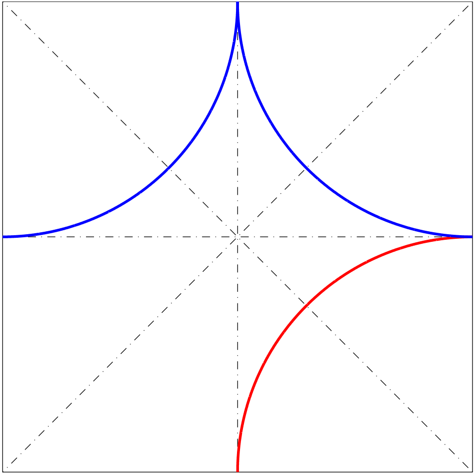
Images de ces courbes par les isométries

pièce 2



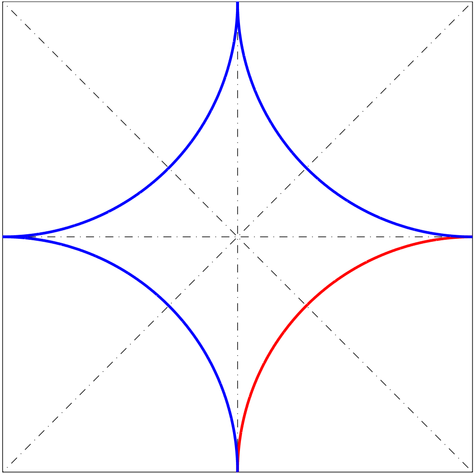
Images de ces courbes par les isométries

pièce 2



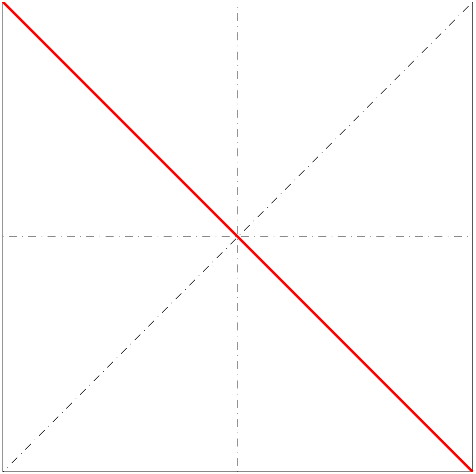
Images de ces courbes par les isométries

pièce 2



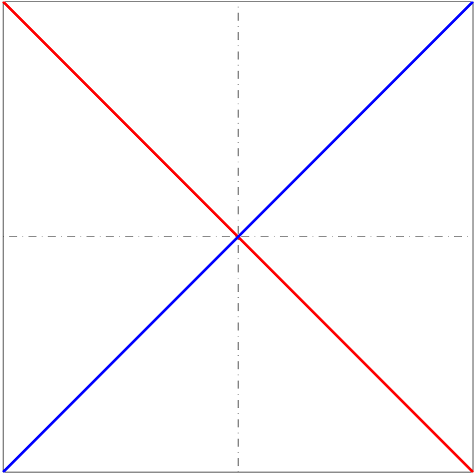
Images de ces courbes par les isométries

pièce 3

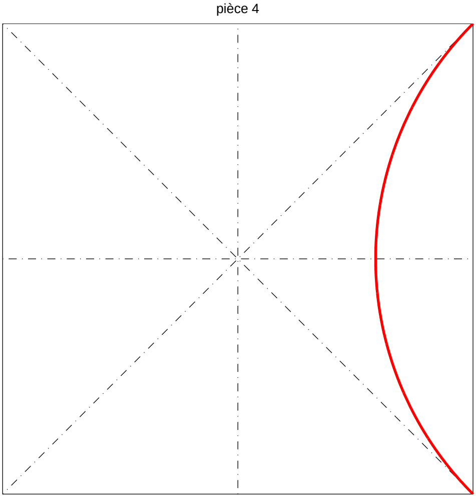


Images de ces courbes par les isométries

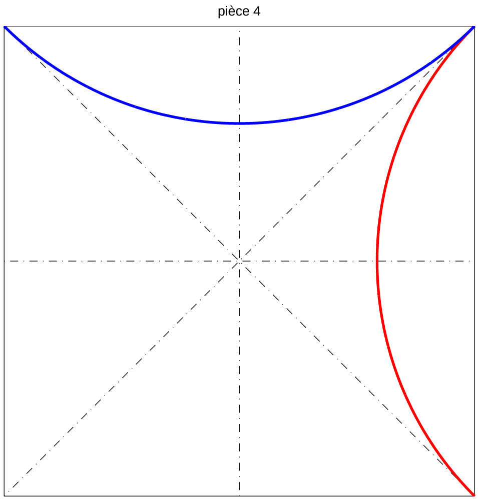
pièce 3



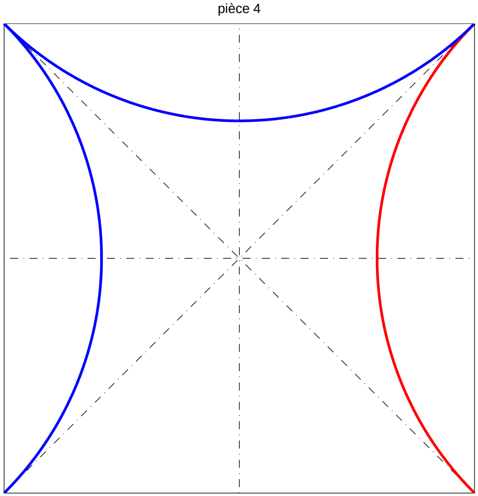
Images de ces courbes par les isométries



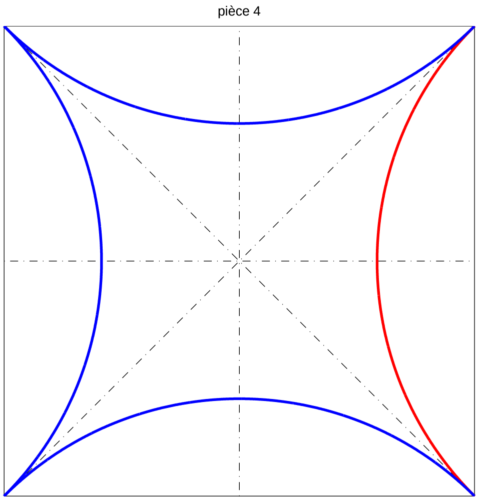
Images de ces courbes par les isométries



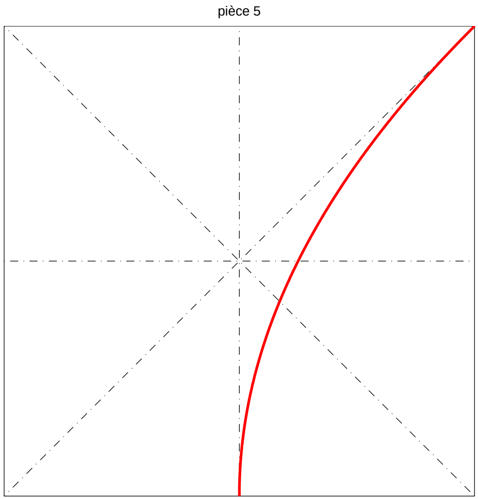
Images de ces courbes par les isométries



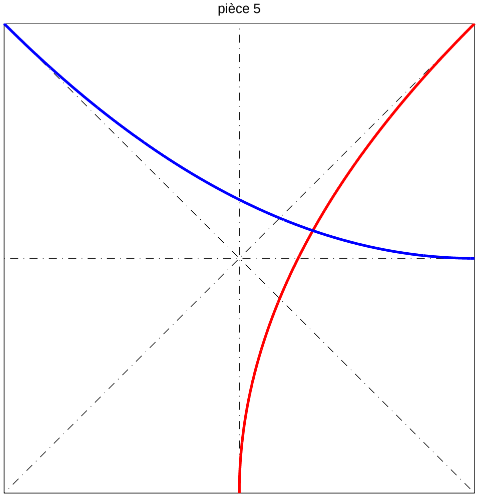
Images de ces courbes par les isométries



Images de ces courbes par les isométries

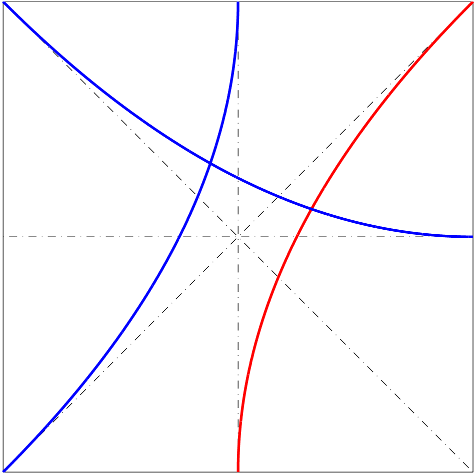


Images de ces courbes par les isométries

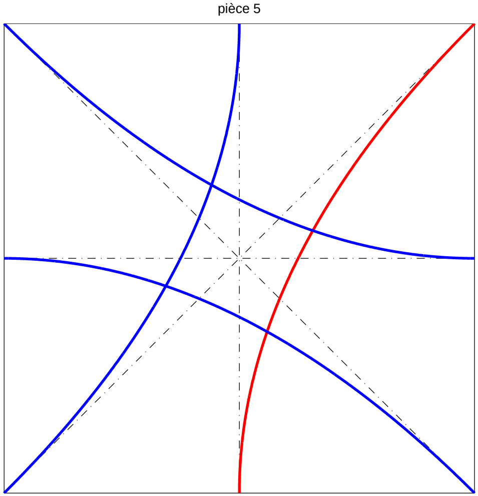


Images de ces courbes par les isométries

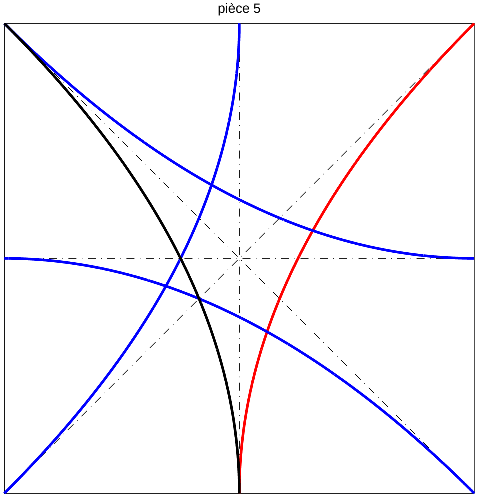
pièce 5



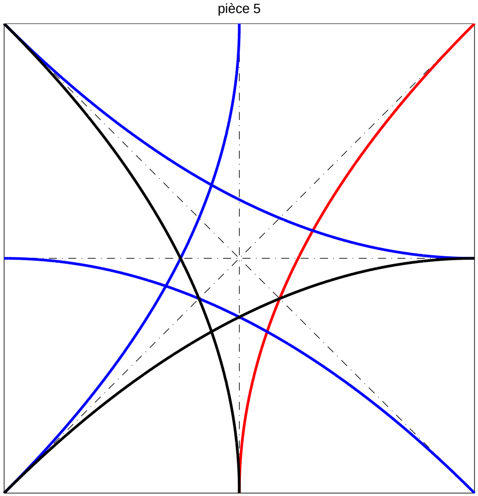
Images de ces courbes par les isométries



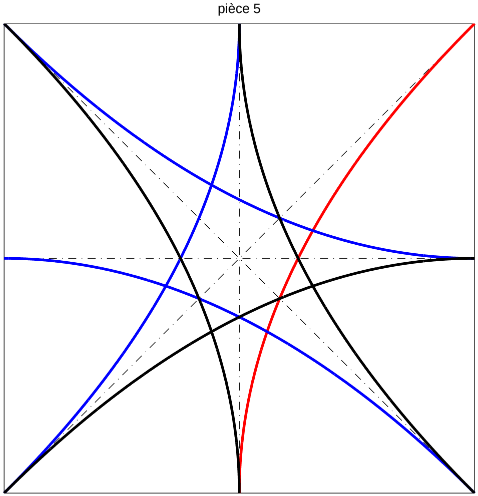
Images de ces courbes par les isométries



Images de ces courbes par les isométries

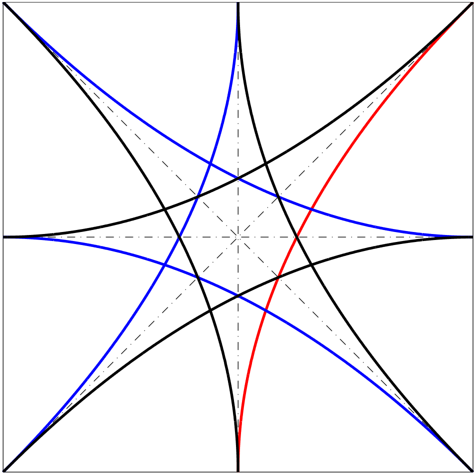


Images de ces courbes par les isométries

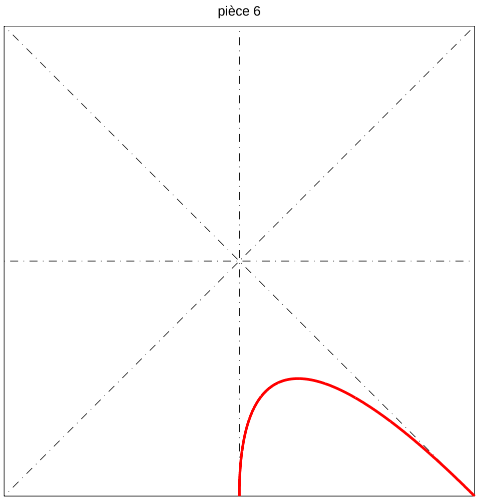


Images de ces courbes par les isométries

pièce 5

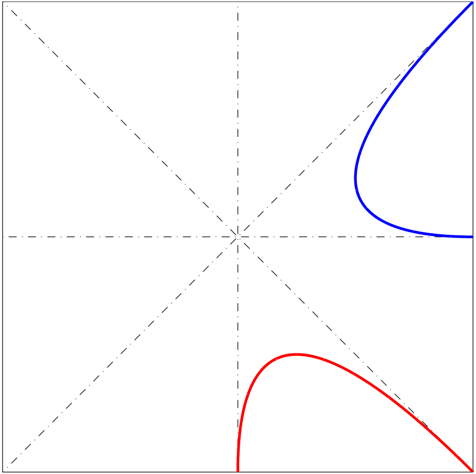


Images de ces courbes par les isométries

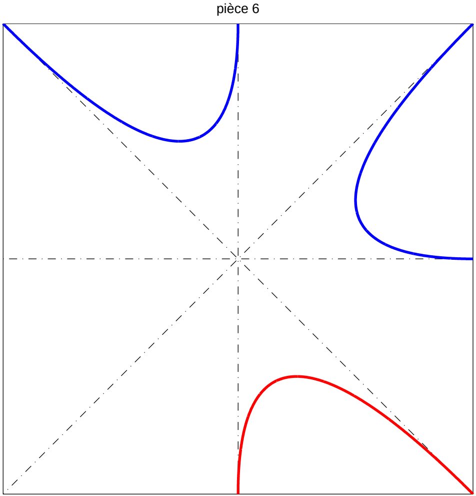


Images de ces courbes par les isométries

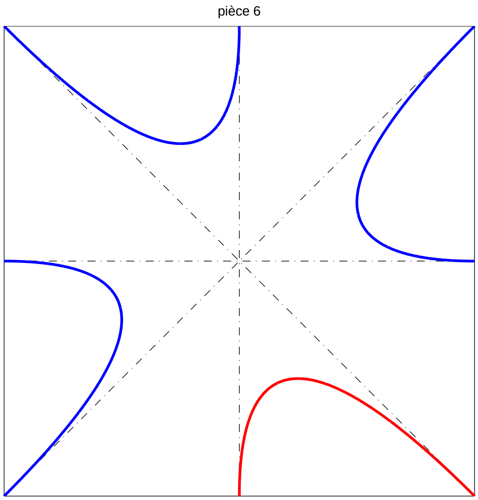
pièce 6



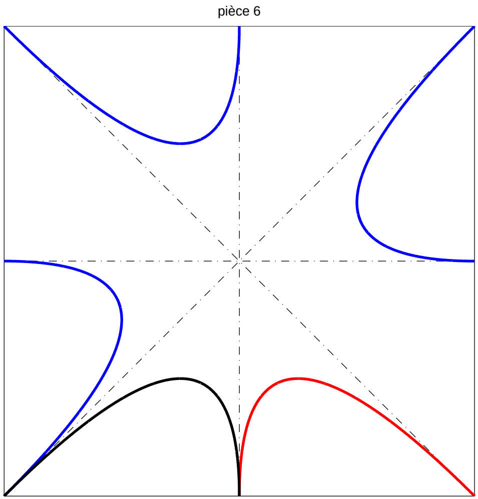
Images de ces courbes par les isométries



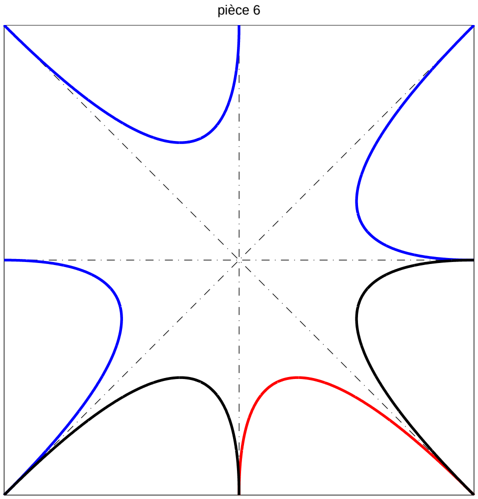
Images de ces courbes par les isométries



Images de ces courbes par les isométries

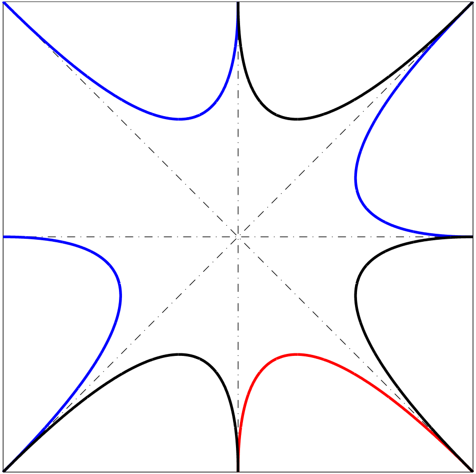


Images de ces courbes par les isométries



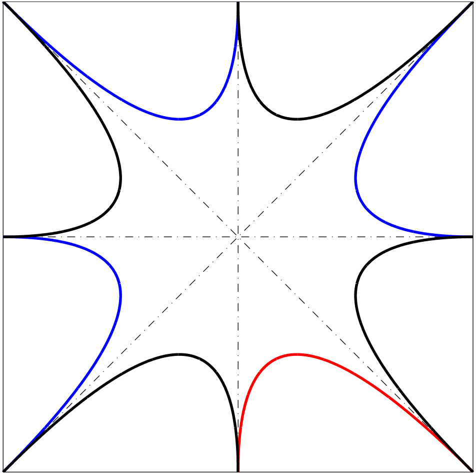
Images de ces courbes par les isométries

pièce 6

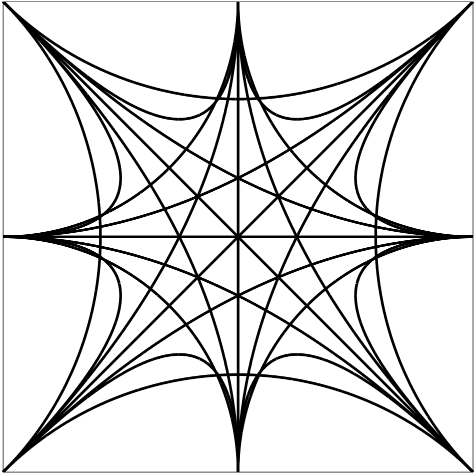


Images de ces courbes par les isométries

pièce 6

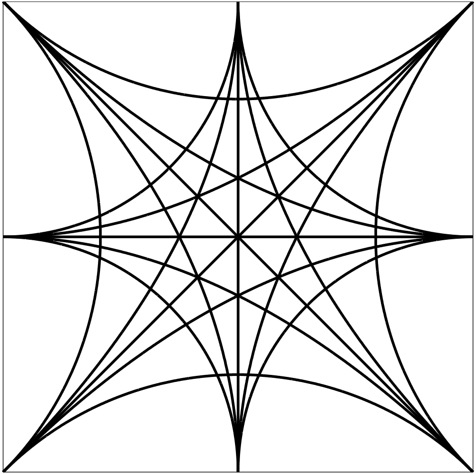


Ensemble des courbes possibles



$\Longrightarrow$ 28 courbes possibles !

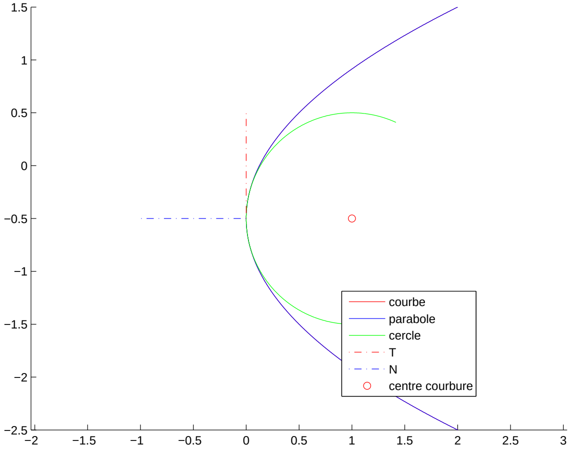
Ensemble des courbes possibles



En enlevant les 8 pièces 6, restent $28 - 8 = 20$ courbes possibles !

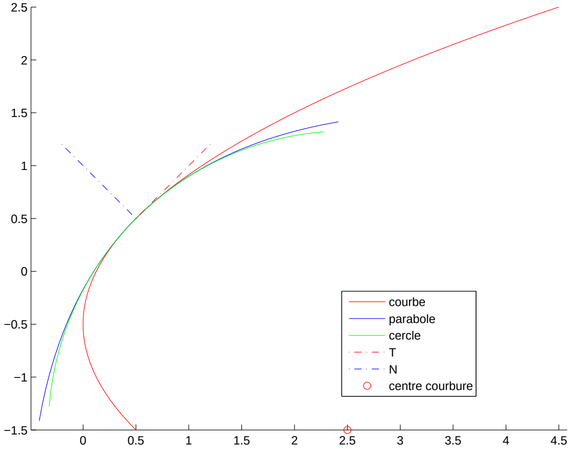
revenir au début des figures

Notion de rayon de courbure



De même qu'une tangente épouse localement une courbe, un cercle osculateur embrasse sa courbe (du latin osculer).

Notion de rayon de courbure



De même qu'une tangente épouse localement une courbe, un cercle osculateur embrasse sa courbe (du latin osculer).

courbe de Bézier pour la pièce 5

On trouve ($t \in [0, 1]$)

$$x(t) = 1/2\, t^2,$$
$$y(t) = -1/2 + t,$$

ce qui correspond à une « simple » parabole et

$$R(t) = -\left(t^2 + 1\right)^{3/2},$$

dont la valeur minimale vaut 1.

courbe de Bézier pour la pièce 6

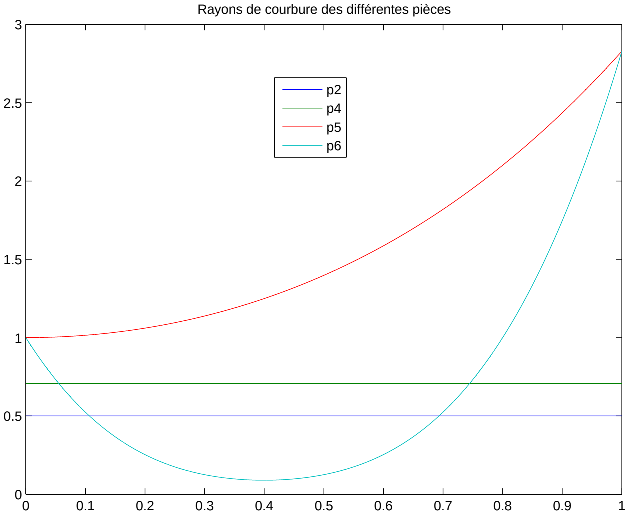
On trouve ($t \in [0, 1]$)

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 1/2\, t^2, \\
y(t) &= -1/2 + t - t^2, \\
R(t) &= -\left(5\, t^2 + 1 - 4\, t\right)^{3/2},
\end{aligned}
$$

dont la valeur minimale vaut

$$R_{\text{min}} = 1/25\,\sqrt{5} \approx 0.089. \tag{1}$$

Rayons de courbure des différentes pièces



Rayons de courbure des différentes pièces

Hormis la pièce 6, les pièces ont un rayon de courbure supérieur à 1/2, rayon (normalisé) qui existe chez Brio et qui a servi de modèle de cotation.

Intérêt de la pièce 6 qui permet de faire tous les trajets possibles, mais trop incurvée !

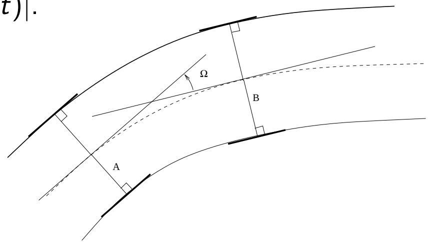
Rayons de courbure des différentes pièces

Hormis la pièce 6, les pièces ont un rayon de courbure supérieur à 1/2, rayon (normalisé) qui existe chez Brio et qui a servi de modèle de cotation.

Intérêt de la pièce 6 qui permet de faire tous les trajets possibles, mais trop incurvée !

Rayons de courbure des différentes pièces

Intérêt d'un grand rayon de courbure :

1. Pour constuire les courbes à écartement constant (e) définissant les passages et les bords, il est nécessaire que $e < |R(t)|$.
2. 

   De plus, si un véhicule possède deux essieux définis par les points A et B, on a

$$\Omega = \phi_A - \phi_B = \int_A^B d\phi = \int_A^B \frac{d\phi}{ds} ds = \int \frac{ds}{R(s)},$$

   il faut donc R grand pour obtenir Ω petit.

Dans le transport réel ?

Est-ce que ce circuit, conçu pour les jeux, peut-être utilisé par des constructeurs de routes ou de voie ferrées ?

Il faut tourner continûment son volant ou son guidon !

L'accélération normale égale à v^2/R provoque une force centrifuge en $1/R$.

Dans le transport réel ?

Est-ce que ce circuit, conçu pour les jeux, peut-être utilisé par des constructeurs de routes ou de voie ferrées ?

Il faut tourner continûment son volant ou son guidon !

L'accélération normale égale à v^2/R provoque une force centrifuge en $1/R$.

Dans le transport réel ?

Est-ce que ce circuit, conçu pour les jeux, peut-être utilisé par des constructeurs de routes ou de voie ferrées ?

Il faut tourner continûment son volant ou son guidon !

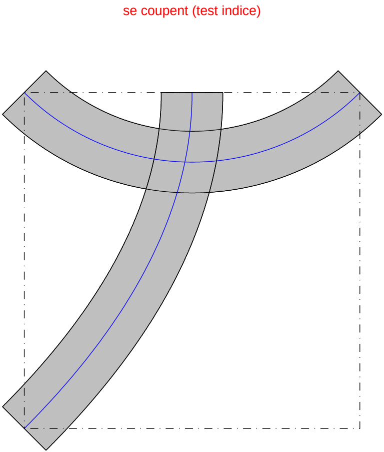
L'accélération normale égale à v^2/R provoque une force centrifuge en $1/R$.

Sommaire

Quelques questions de dénombrements

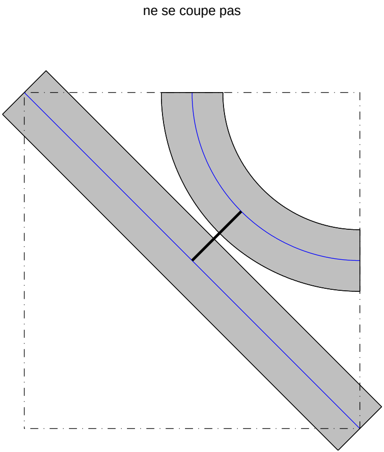
- Dénombrer les circuits à faible nombre de pièces ;
- Introduire les ismométries, directes ou indirectes, pour éviter que les circuits ne se reproduisent à l'identique.
- Voir plus loin, problème de dénombrement ouvert !

Plusieurs pièces dans un seul même carré



Deux pièces peuvent coexister dans un seul même carrés, en évitant la situation de la figure ci-dessus ...

Plusieurs pièces dans un seul même carré



... pour être disjointes comme ici.

Distance entre deux courbes

- Notion de distance entre deux courbes : on cherche à minimiser M_1M_2, M_1 et M_2 décrivant chacun une courbe.
- Chacune d'elle est soit une droite, soit un cercle, soit une parabole.
- Les cas où seuls les droites et les cercles interviennent peuvent être présentés au collège.
- La prise en compte des paraboles n'est plus possible de façon purement géométrique et fait apparaître des équations polynomiales.
- Cela peut être introduit au lycée voire à l'université : notions de minimum de fonction, systèmes non linéaires à résoudre numériquement.

Distance entre deux courbes

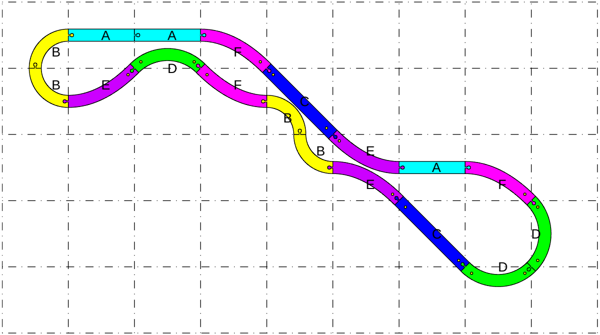
- Notion de distance entre deux courbes : on cherche à minimiser M_1M_2, M_1 et M_2 décrivant chacun une courbe.
- Chacune d'elle est soit une droite, soit un cercle, soit une parabole.
- Les cas où seuls les droites et les cercles interviennent peuvent être présentés au collège.
- La prise en compte des paraboles n'est plus possible de façon purement géométrique et fait apparaître des équations polynomiales.
- Cela peut être introduit au lycée voire à l'université : notions de minimum de fonction, systèmes non linéaires à résoudre numériquement.

Distance entre deux courbes

- Notion de distance entre deux courbes : on cherche à minimiser M_1M_2, M_1 et M_2 décrivant chacun une courbe.
- Chacune d'elle est soit une droite, soit un cercle, soit une parabole.
- Les cas où seuls les droites et les cercles interviennent peuvent être présentés au collège.
- La prise en compte des paraboles n'est plus possible de façon purement géométrique et fait apparaître des équations polynomiales.
- Cela peut être introduit au lycée voire à l'université : notions de minimum de fonction, systèmes non linéaires à résoudre numériquement.

Un exemple de circuit avec deux pièces dans un même carré

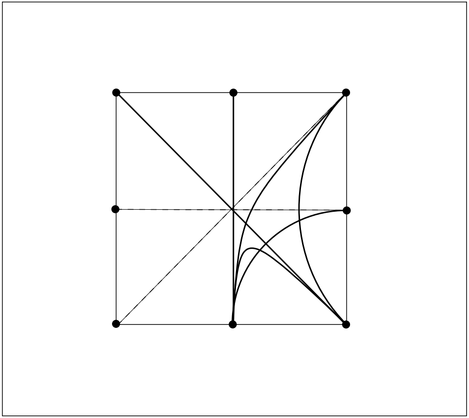
A: 3, B: 4, C: 2, D: 3, F: 3, E: 3



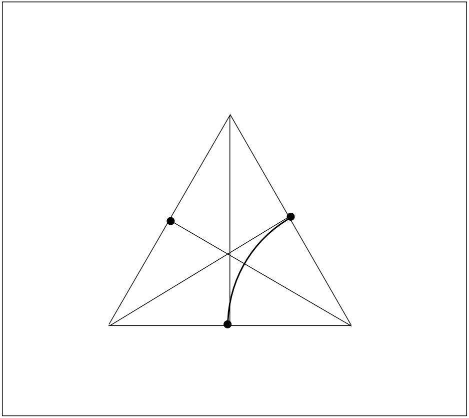
Question !

Est-ce possible d'avoir un circuit avec plus de trois pièces dans un seul même carré ?

Autres pavages possibles
Le carré initialement choisi

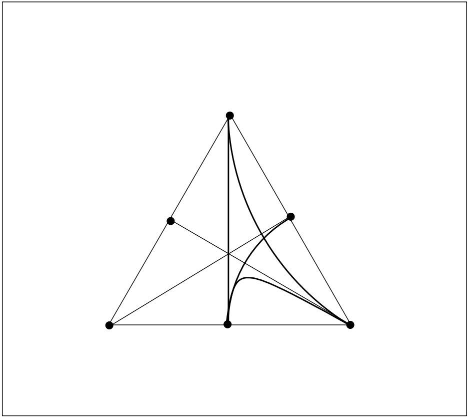


Autres pavages possibles
Triangle équilatéral



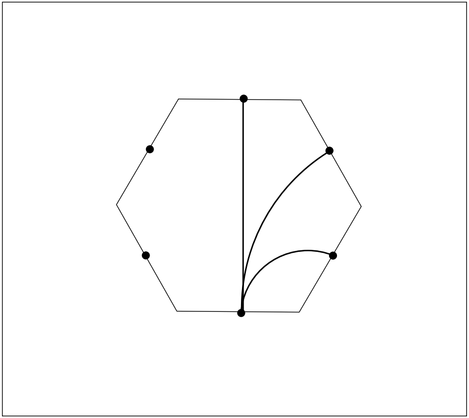
Milieux seuls

Autres pavages possibles
Triangle équilatéral



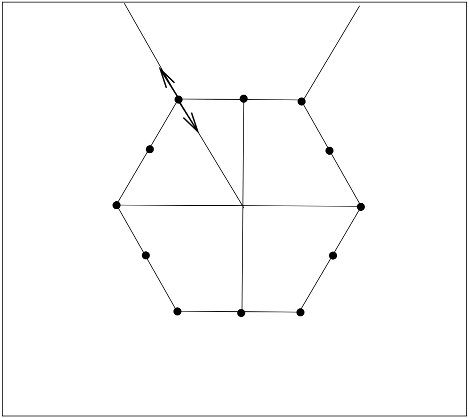
Milieux et sommets

Autres pavages possibles
Octogone régulier



Milieux seuls

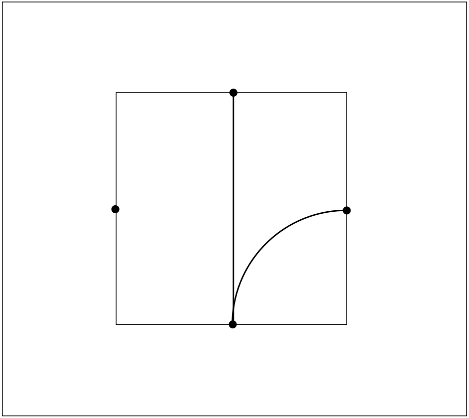
Autres pavages possibles
Octogone régulier



Milieux et sommets $\Longrightarrow$ Impossible !

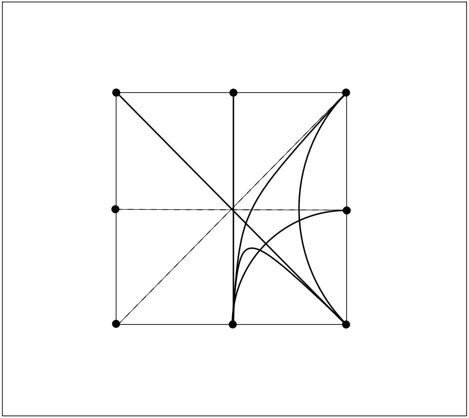
Autres pavages possibles

Carré



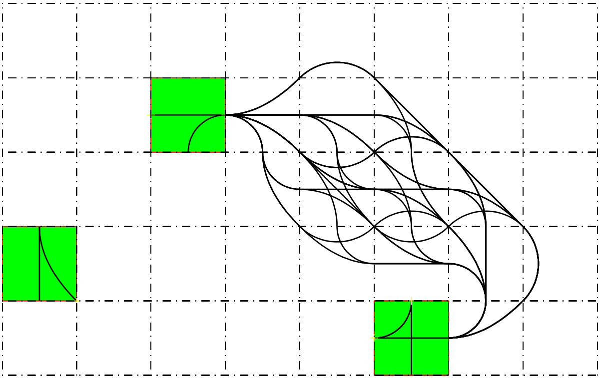
Milieux seuls $\Longrightarrow$ Déjà existants (Brio ©) !

Autres pavages possibles
Carré



Milieux et sommets $\Longrightarrow$ Déjà vus !

Problèmes des aiguillages et autres



Réflexion sur l'aspect conceptuel des mathématiques

- Ce monde des concepts constitue un monde à part, que l'on peut mettre en parallèle avec le monde des idées de Platon.
- Tels les artistes, qui chez Platon, ouvrent une porte vers le monde des idées, les mathématiciens permettent à leur manière un accès au monde des idées abstraites.
- La construction du circuit de train, comme les autres constructions, peut montrer l'aspect idéal des courbes étudiées et utilisées (droite, cercles, paraboles) dont on sait qu'elles existent et vérifient les conditions de tangence, avant même de les définir analytiquement !
- Ensuite, il faut passer à la construction de la courbe, puis au plan en 2D, puis en 3D et enfin à la réalisation matérielle des rails ; lors de ces passages, du théorique vers le réel, on peut voir s'accroître le côté matériel et nécessairement imprécis.

Réflexion sur l'aspect conceptuel des mathématiques

- Ce monde des concepts constitue un monde à part, que l'on peut mettre en parallèle avec le monde des idées de Platon.
- Tels les artistes, qui chez Platon, ouvrent une porte vers le monde des idées, les mathématiciens permettent à leur manière un accès au monde des idées abstraites.
- La construction du circuit de train, comme les autres constructions, peut montrer l'aspect idéal des courbes étudiées et utilisées (droite, cercles, paraboles) dont on sait qu'elles existent et vérifient les conditions de tangence, avant même de les définir analytiquement !
- Ensuite, il faut passer à la construction de la courbe, puis au plan en 2D, puis en 3D et enfin à la réalisation matérielle des rails ; lors de ces passages, du théorique vers le réel, on peut voir s'accroître le côté matériel et nécessairement imprécis.

Réflexion sur l'aspect conceptuel des mathématiques

- Ce monde des concepts constitue un monde à part, que l'on peut mettre en parallèle avec le monde des idées de Platon.
- Tels les artistes, qui chez Platon, ouvrent une porte vers le monde des idées, les mathématiciens permettent à leur manière un accès au monde des idées abstraites.
- La construction du circuit de train, comme les autres constructions, peut montrer l'aspect idéal des courbes étudiées et utilisées (droite, cercles, paraboles) dont on sait qu'elles existent et vérifient les conditions de tangence, avant même de les définir analytiquement !
- Ensuite, il faut passer à la construction de la courbe, puis au plan en 2D, puis en 3D et enfin à la réalisation matérielle des rails ; lors de ces passages, du théorique vers le réel, on peut voir s'accroître le côté matériel et nécessairement imprécis.

Réflexion sur l'aspect conceptuel des mathématiques

- Ce monde des concepts constitue un monde à part, que l'on peut mettre en parallèle avec le monde des idées de Platon.
- Tels les artistes, qui chez Platon, ouvrent une porte vers le monde des idées, les mathématiciens permettent à leur manière un accès au monde des idées abstraites.
- La construction du circuit de train, comme les autres constructions, peut montrer l'aspect idéal des courbes étudiées et utilisées (droite, cercles, paraboles) dont on sait qu'elles existent et vérifient les conditions de tangence, avant même de les définir analytiquement !
- Ensuite, il faut passer à la construction de la courbe, puis au plan en 2D, puis en 3D et enfin à la réalisation matérielle des rails ; lors de ces passages, du théorique vers le réel, on peut voir s'accroître le côté matériel et nécessairement imprécis.

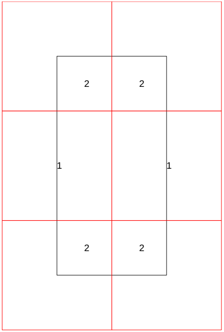
Sommaire

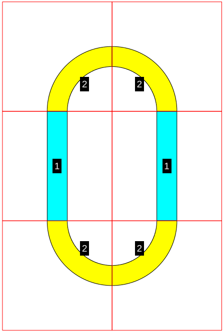
Notion de chemins et de polygones autoévitants

Étudiés depuis une trentaine d'années par Gordon Slade, Neal Madras, Iwan Jensen et Anthony J Guttmann. Voir [JG99 ; Gut12b ; Gut12a ; CJ12 ; MS93 ; Sla11 ; Jen04]

Polygones autoévitants et circuits

Exemples identiques



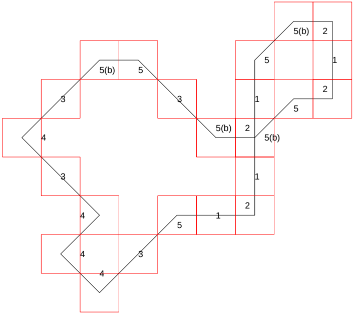


Polygones autoévitants

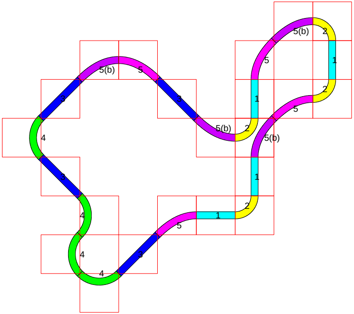
Circuits

Polygones autoévitants et circuits

Exemples différents



Polygones autoévitants



Circuits

Différences entre les polygones autoévitants et les circuits

1. Pour les polygones autoévitants les carrés doivent être nécessairement deux à deux distincts, en revanche le système *Easyloop* autorise deux carrés non successifs à se confondre ;
2. Deux carrés successifs dans les polygones autoévitants ne peuvent avoir en commun qu'un côté, contrairement au système *Easyloop*.
3. Des contraintes supplémentaires dues au nombre de pièces disponibles seront à prendre en compte dans le système *Easyloop*.
4. Il faudra ne conserver que les circuits, différents à une isométrie près.
5. Enfin, le nombre de pièces utilisées dans les polygones autoévitants est nécessairement pair ; dans le cas impair, aucun polygone n'existe, ce qui n'est pas le cas des circuits.

Différences entre les polygones autoévitants et les circuits

1. Pour les polygones autoévitants les carrés doivent être nécessairement deux à deux distincts, en revanche le système *Easyloop* autorise deux carrés non successifs à se confondre ;
2. Deux carrés successifs dans les polygones autoévitants ne peuvent avoir en commun qu'un côté, contrairement au système *Easyloop*.
3. Des contraintes supplémentaires dues au nombre de pièces disponibles seront à prendre en compte dans le système *Easyloop*.
4. Il faudra ne conserver que les circuits, différents à une isométrie près.
5. Enfin, le nombre de pièces utilisées dans les polygones autoévitants est nécessairement pair ; dans le cas impair, aucun polygone n'existe, ce qui n'est pas le cas des circuits.

Différences entre les polygones autoévitants et les circuits

1. Pour les polygones autoévitants les carrés doivent être nécessairement deux à deux distincts, en revanche le système *Easyloop* autorise deux carrés non successifs à se confondre ;
2. Deux carrés successifs dans les polygones autoévitants ne peuvent avoir en commun qu'un côté, contrairement au système *Easyloop*.
3. Des contraintes supplémentaires dues au nombre de pièces disponibles seront à prendre en compte dans le système *Easyloop*.
4. Il faudra ne conserver que les circuits, différents à une isométrie près.
5. Enfin, le nombre de pièces utilisées dans les polygones autoévitants est nécessairement pair ; dans le cas impair, aucun polygone n'existe, ce qui n'est pas le cas des circuits.

Différences entre les polygones autoévitants et les circuits

1. Pour les polygones autoévitants les carrés doivent être nécessairement deux à deux distincts, en revanche le système *Easyloop* autorise deux carrés non successifs à se confondre ;
2. Deux carrés successifs dans les polygones autoévitants ne peuvent avoir en commun qu'un côté, contrairement au système *Easyloop*.
3. Des contraintes supplémentaires dues au nombre de pièces disponibles seront à prendre en compte dans le système *Easyloop*.
4. Il faudra ne conserver que les circuits, différents à une isométrie près.
5. Enfin, le nombre de pièces utilisées dans les polygones autoévitants est nécessairement pair ; dans le cas impair, aucun polygone n'existe, ce qui n'est pas le cas des circuits.

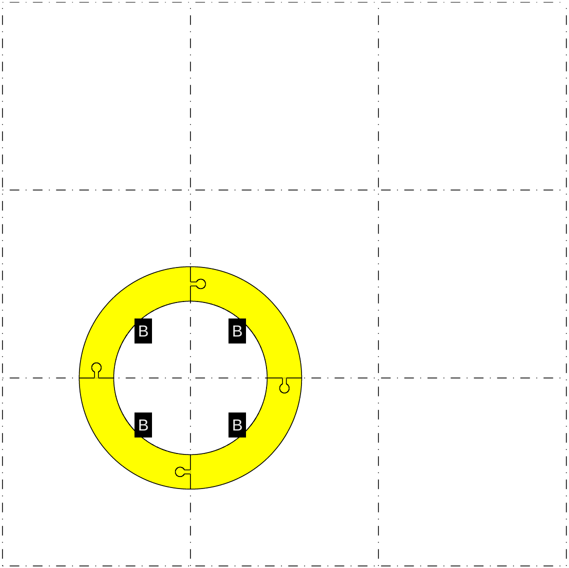
Différences entre les polygones autoévitants et les circuits

1. Pour les polygones autoévitants les carrés doivent être nécessairement deux à deux distincts, en revanche le système *Easyloop* autorise deux carrés non successifs à se confondre ;
2. Deux carrés successifs dans les polygones autoévitants ne peuvent avoir en commun qu'un côté, contrairement au système *Easyloop*.
3. Des contraintes supplémentaires dues au nombre de pièces disponibles seront à prendre en compte dans le système *Easyloop*.
4. Il faudra ne conserver que les circuits, différents à une isométrie près.
5. Enfin, le nombre de pièces utilisées dans les polygones autoévitants est nécessairement pair ; dans le cas impair, aucun polygone n'existe, ce qui n'est pas le cas des circuits.

Énumération

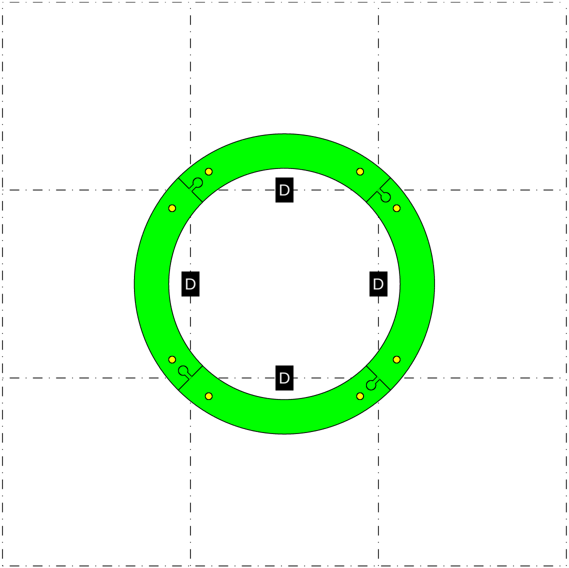
passer les circuits

Tous les 2 circuits retenus sur les 400 circuits possibles



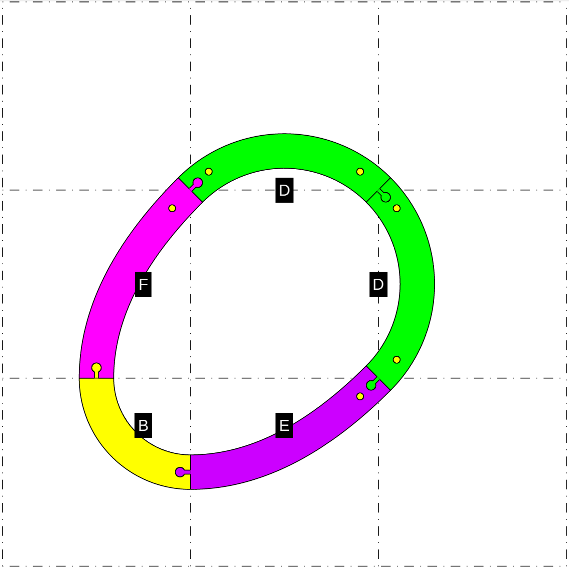
circuit 1/2

Tous les 2 circuits retenus sur les 400 circuits possibles

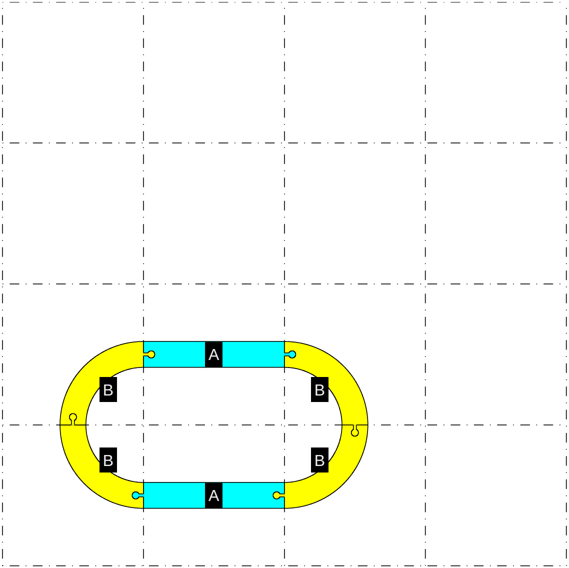


circuit 2/2

Le seul circuit retenu sur les 2000 circuits possibles

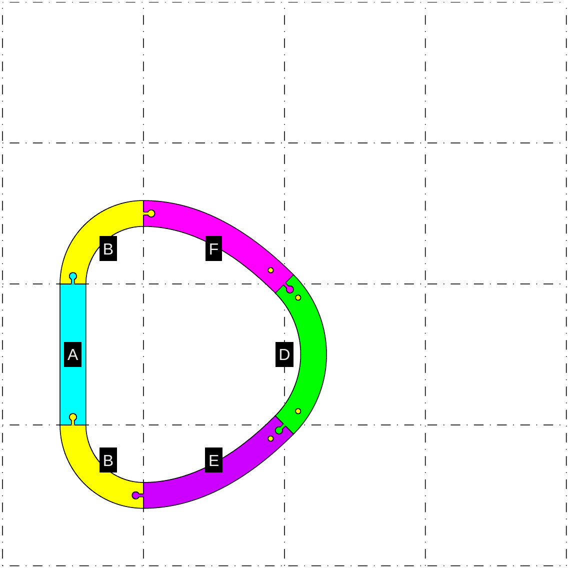


Tous les 5 circuits retenus sur les 10000 circuits possibles



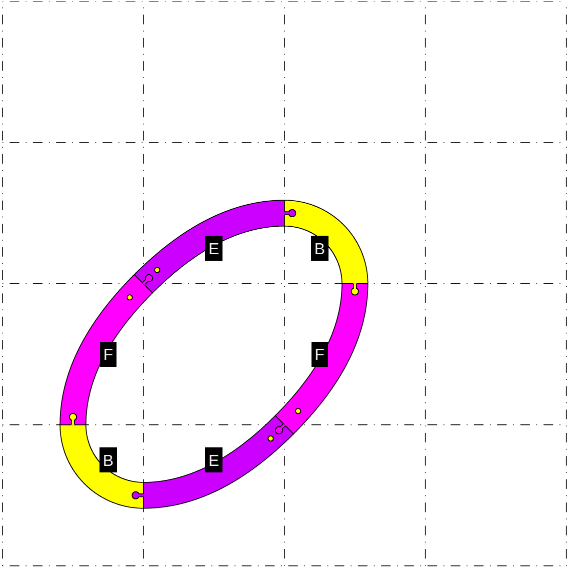
circuit 1/5

Tous les 5 circuits retenus sur les 10000 circuits possibles



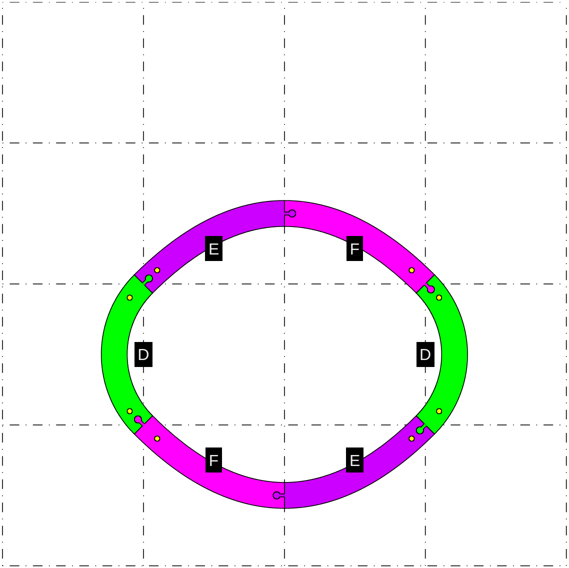
circuit 2/5

Tous les 5 circuits retenus sur les 10000 circuits possibles



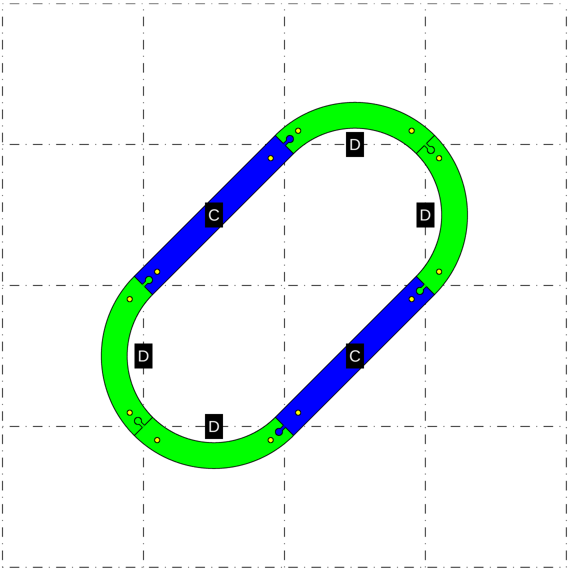
circuit 3/5

Tous les 5 circuits retenus sur les 10000 circuits possibles



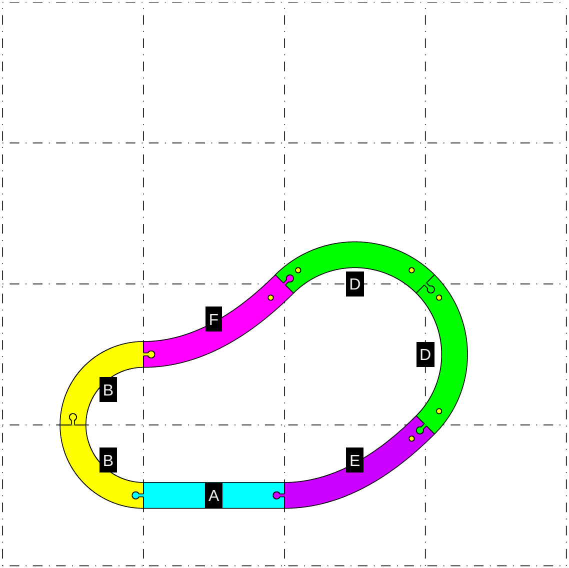
circuit 4/5

Tous les 5 circuits retenus sur les 10000 circuits possibles



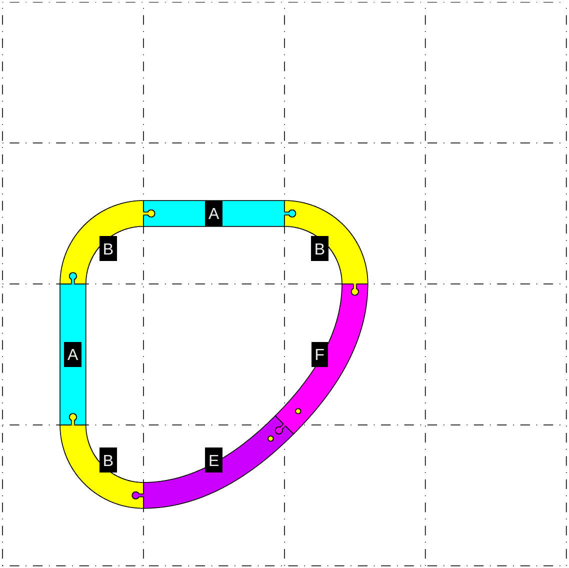
circuit 5/5

Tous les 6 circuits retenus sur les 50000 circuits possibles



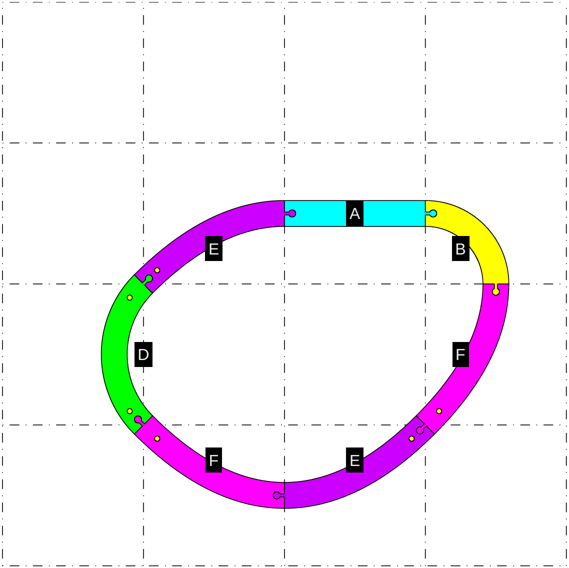
circuit 1/6

Tous les 6 circuits retenus sur les 50000 circuits possibles



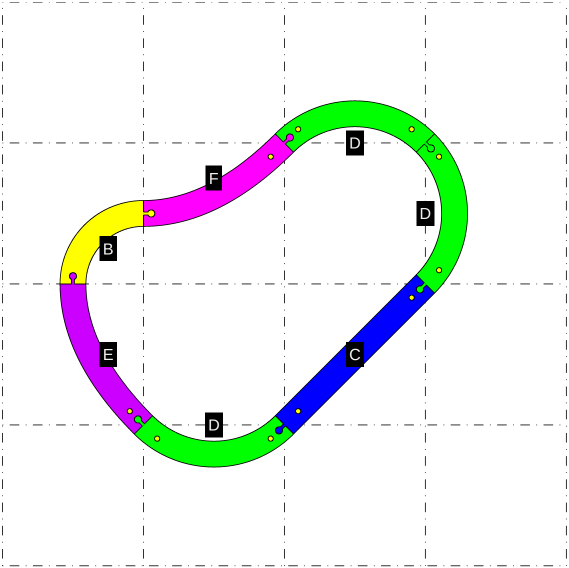
circuit 2/6

Tous les 6 circuits retenus sur les 50000 circuits possibles



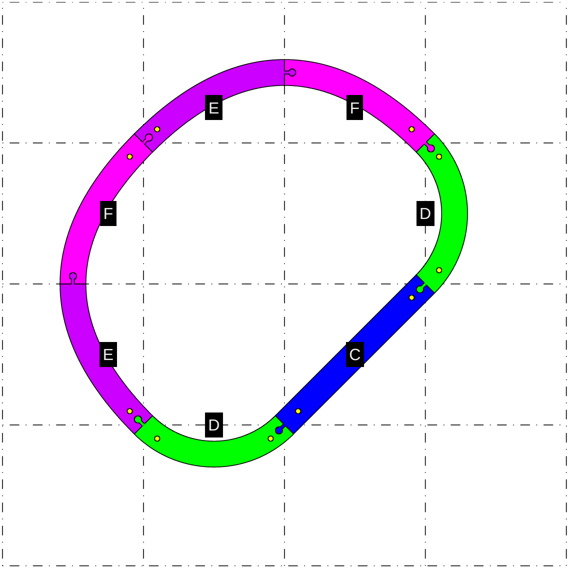
circuit 3/6

Tous les 6 circuits retenus sur les 50000 circuits possibles



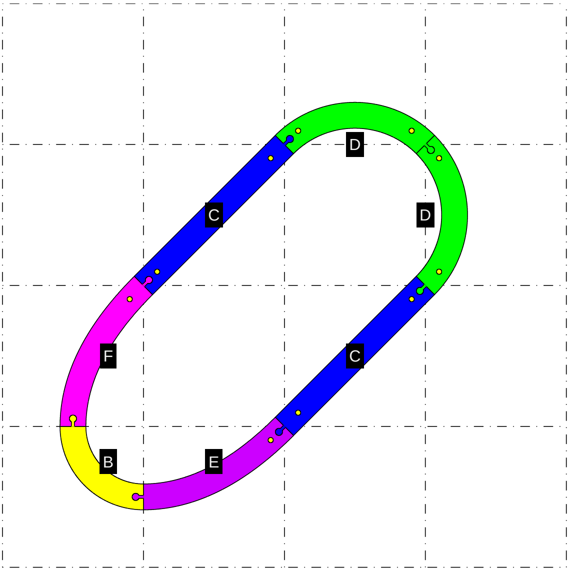
circuit 4/6

Tous les 6 circuits retenus sur les 50000 circuits possibles



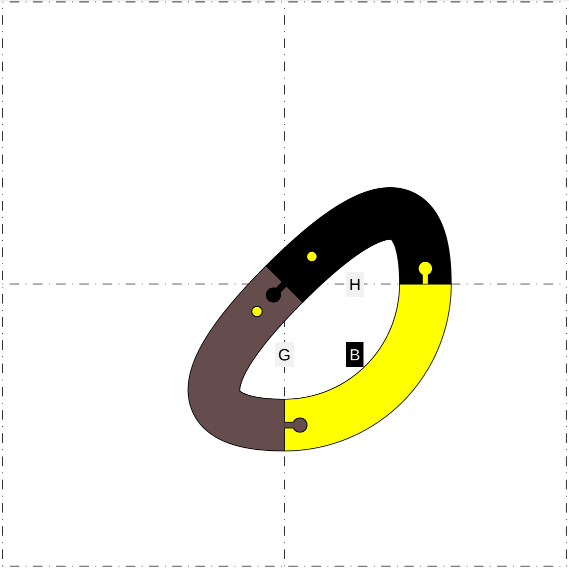
circuit 5/6

Tous les 6 circuits retenus sur les 50000 circuits possibles

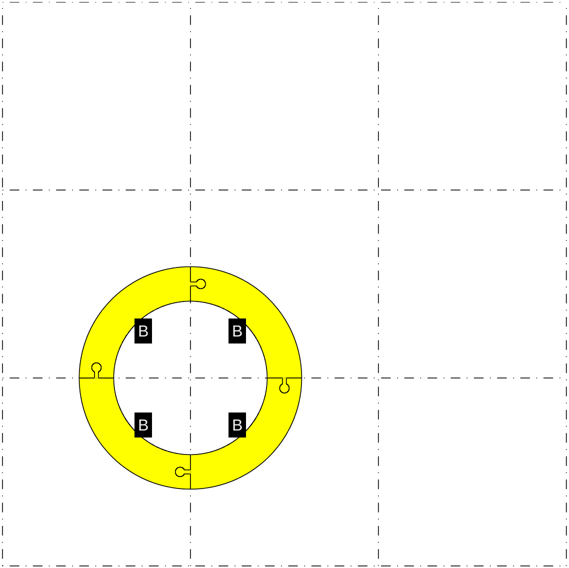


circuit 6/6

Le seul circuit retenu sur les 112 circuits possibles

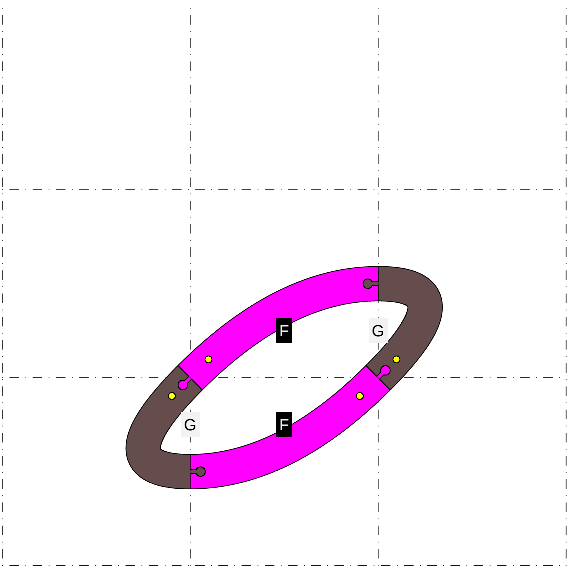


Tous les 4 circuits retenus sur les 784 circuits possibles



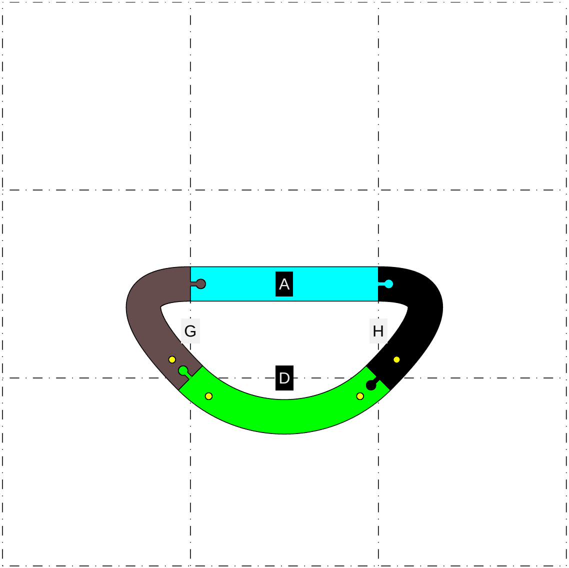
circuit 1/4

Tous les 4 circuits retenus sur les 784 circuits possibles



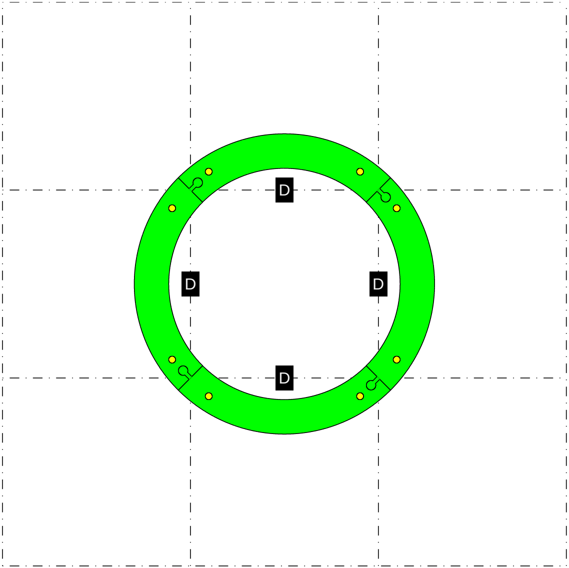
circuit 2/4

Tous les 4 circuits retenus sur les 784 circuits possibles



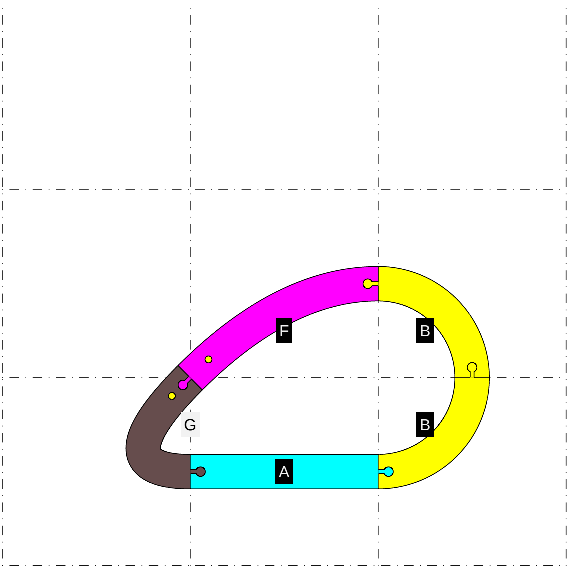
circuit 3/4

Tous les 4 circuits retenus sur les 784 circuits possibles



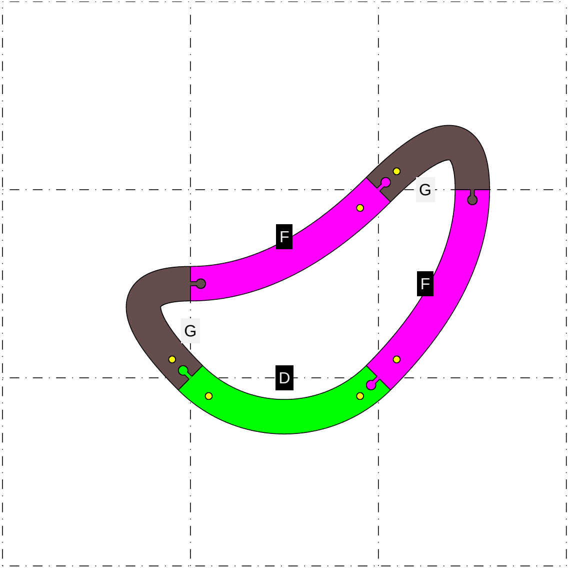
circuit 4/4

Tous les 5 circuits retenus sur les 5488 circuits possibles



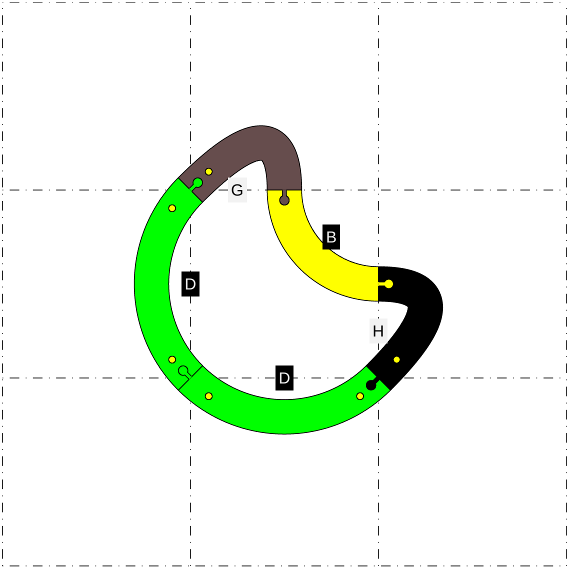
circuit 1/5

Tous les 5 circuits retenus sur les 5488 circuits possibles



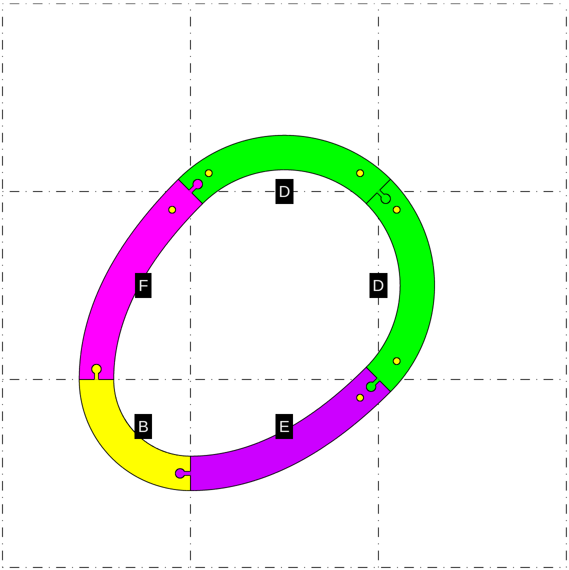
circuit 2/5

Tous les 5 circuits retenus sur les 5488 circuits possibles



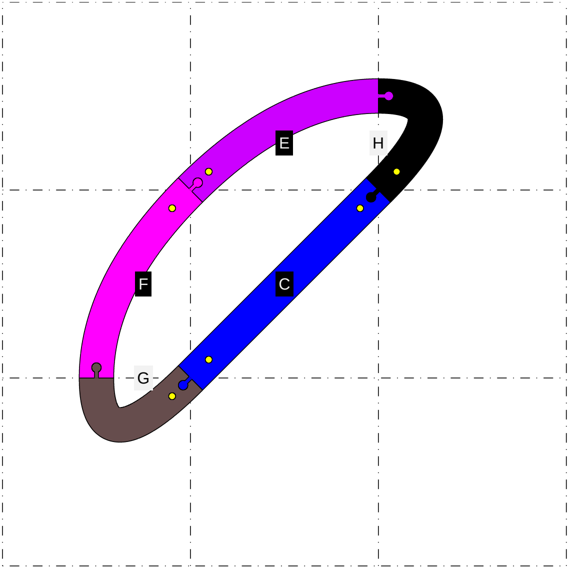
circuit 3/5

Tous les 5 circuits retenus sur les 5488 circuits possibles



circuit 4/5

Tous les 5 circuits retenus sur les 5488 circuits possibles



circuit 5/5

Énumération

revenir au début les circuits

Nombre de circuits

N	$N_j = +\infty$	$N_j = 4$
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	2	2
5	1	1
6	5	5
7	7	6
8	33	28
9	74	63
10	304	244
11	986	753

Nombre de circuits (références)

- Voir l'article en cours de publication [Bas16b ; Bas16c] disponible sur http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/articles_provisoires/enumeration_circuit_JB_2016.pdf
- Voir aussi le catalogue disponible sur http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/catalogue_exhaustif_11rails.pdf

Sommaire

Matériel

- Les rails *Easyloop* !
- Cartes ;
- Poster ;
- Programme informatique disponible pour Windows :
    - `http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/MCRInstaller.exe`
    - `http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/creecircuit.exe`
    - `http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/creecircuitaleat.exe`
    - `http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/dessinecircuit.exe`
    - `http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/mode_emploi_rail_demo.pdf`

Démonstration : lancer `cree_circuit_demo`

Exposés déjà faits

- Semaine « les mathématiques nous transportent ! » [Bas15a] ;
- Séminaire de la détente de la MMI [Bas15b] ;
- Stages MathsC2+, organisés en collaboration avec Nicolas Pelay, de l'association Plaisir Maths `http://www.plaisir-maths.fr/` [Bas16a].

[Bas12] J. Bastien. "Circuit apte à guider un véhicule miniature". Brevet FR2990627. Université Lyon I. Brevet publié sur le site de l'INPI http://bases-brevets.inpi.fr/fr/document/FR2990627.html?p=6&s=1423127185056&cHash=cfbc2dad6e2e39808596f86b89117583 Voir aussi [Bas13]. 15 mai 2012.

[Bas13] J. Bastien. "Circuit suitable for guiding a miniature vehicle [Circuit apte à guider un véhicule miniature]". Brevet WO2013171170. Université Lyon I. Demande internationale publiée en vertu du traité de coopération en matière de brevets (PCT). Voir http://bases-brevets.inpi.fr/fr/document/WO2013171170.html?p=6&s=1423127405077&cHash=6947975351b6d1cf7dd56d4e749a98bb. 13 mai 2013.

[Bas15a] J. Bastien. *Comment concevoir un circuit de train miniature qui se reboucle toujours bien ?* Transparents présentés lors du Forum des mathématiques 2015 à l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon, disponibles sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_forum_2015.pdf. 2015. 73 pages.

[Bas15b] J. Bastien. *Comment concevoir un circuit de train miniature qui se reboucle toujours bien ? –Deux questions d'algèbre et de* *dénombrement*. Transparents présentés au « séminaire détente » de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique, Lyon, disponibles sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_MMI_2015.pdf. 2015. 80 pages.

[Bas16a] J. Bastien. *Atelier Maths C2+ : Circuits de trains et paraboles.* MathC2+ à l'université Lyon I, disponible sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/parabole_circuit_train.pdf. 2016. 32 pages.

[Bas16b] J. Bastien. *Construction and enumeration of circuits capable of guiding a miniature vehicle*. 2016. arXiv :1603.08775.

[Bas16c] J. Bastien. "Construction and enumeration of circuits capable of guiding a miniature vehicle". Dans : *Recreational Mathematics Magazine* (2016). Accepté pour publication. Disponible sur http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/articles_provisoires/enumeration_circuit_JB_2016.pdf.

[CJ12] N. Clisby et I. Jensen. "A new transfer-matrix algorithm for exact enumerations : self-avoiding polygons on the square lattice". Dans : *J. Phys. A* 45.11 (2012), pages 115202, 15. doi : 10.1088/1751-8113/45/11/115202.

[Gut12a] A. J. Guttmann. *Self-Avoiding Walks and Polygons – An Overview*. 2012. arXiv :1212.3448.

[Gut12b] A. J. Guttmann. "Self-Avoiding Walks and Polygons – An Overview". Dans : *Asia Pacific Mathematics Newsletter* 2.4 (2012). http://www.asiapacific-mathnews.com/02/0204/0001_0010.pdf.

[Jen04] I. Jensen. "Enumeration of self-avoiding walks on the square lattice". Dans : *J. Phys. A* 37.21 (2004), pages 5503–5524. doi : 10.1088/0305-4470/37/21/002.

[JG99] I. Jensen et A. J. Guttmann. "Self-avoiding polygons on the square lattice". Dans : *J. Phys. A* 32.26 (1999), pages 4867–4876. doi : 10.1088/0305-4470/32/26/305.

[LH97] C. Lebossé et C. Hémery. *Géométrie. Classe de Mathématiques (Programmes de 1945)*. Paris : Jacques Gabay, 1997.

[MS93] N. Madras et G. Slade. *The self-avoiding walk*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993, pages xiv+425.

[Sla11] G. Slade. "The self-avoiding walk : a brief survey". Dans : *Surveys in stochastic processes*. EMS Ser. Congr. Rep. Eur. Math. Soc., Zürich, 2011, pages 181–199. doi : 10.4171/072-1/9.