Géométries autour d'un circuit de train extensible et modulaire

Journées 2024 de l'APMEP, le Havre

Jérôme Bastien

Laboratoire Interuniversitaire de la Biologie de la Motricité/Polytech – Université Lyon I

Dimanche 20 Octobre 2024

Sommaire

Résumé

Un circuit de train miniature breveté permet de construire un très grand nombre de circuits de sorte que les boucles se referment parfaitement. Partiellement présenté aux JN 2016, ce circuit s'appuie sur de nombreuses propriétés géométriques, utilisées de l'école jusqu'à l'université, ce qui permet d'organiser de nombreuses séquences pédagogiques.

Sommaire

Consignes

À partir des rails prototypes réaliser au hasard une boucle avec les deux seules consignes suivantes :

- Le circuit doit se refermer ;
- Unique règle de connexion : les extrémités de deux rails contigus doivent être du même type (absence ou présence simultanée de pastille de couleur).

Alternative !

- Retrouver par vous-même le principe de construction ! Ou ...

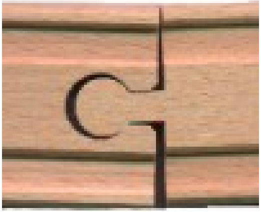
Alternative !

- Retrouver par vous-même le principe de construction ! Ou ...
- suivre l'exposé !

Brevet délivré et références disponibles

- J. Bastien. "Circuit apte à guider un véhicule miniature". FR2990627. Université Lyon I. Brevet publié sur le site de l'INPI http://data.inpi.fr, numéro FR2990627 https://data.inpi.fr/brevets/FR2990627?q=FR1254413#FR2990627. 15 mai 2012
- http://web.archive.org/web/20181226055919/http://easyloop.toys/
- [Bas16 ; Bas17]

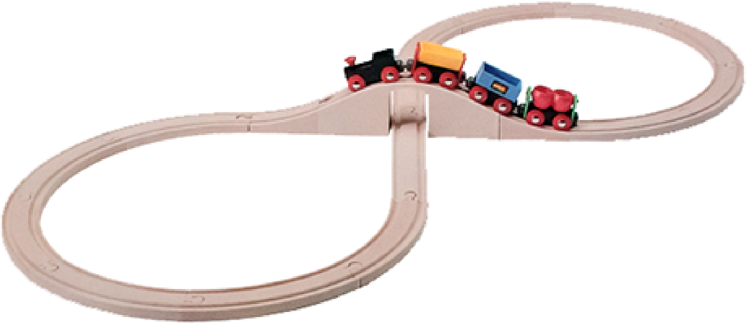
Le «Vario system»



Voir `http://www.woodenrailway.info/track/trackmath.html`

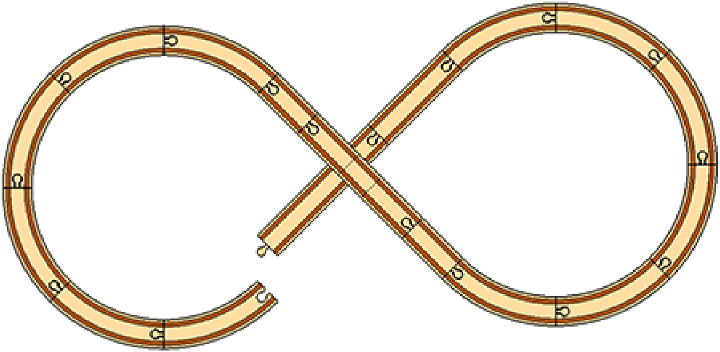
Le «Vario system»

« Note how the photograph from the BRIO 1996 catalog shows a perfect fit » :

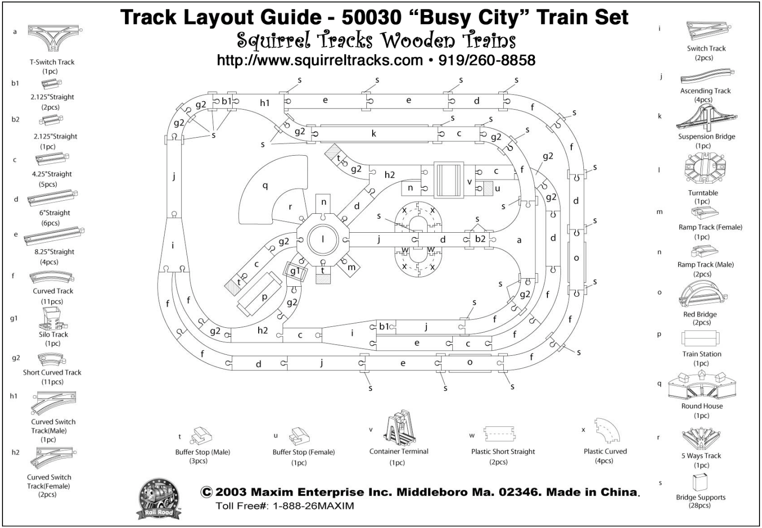


Le «Vario system»

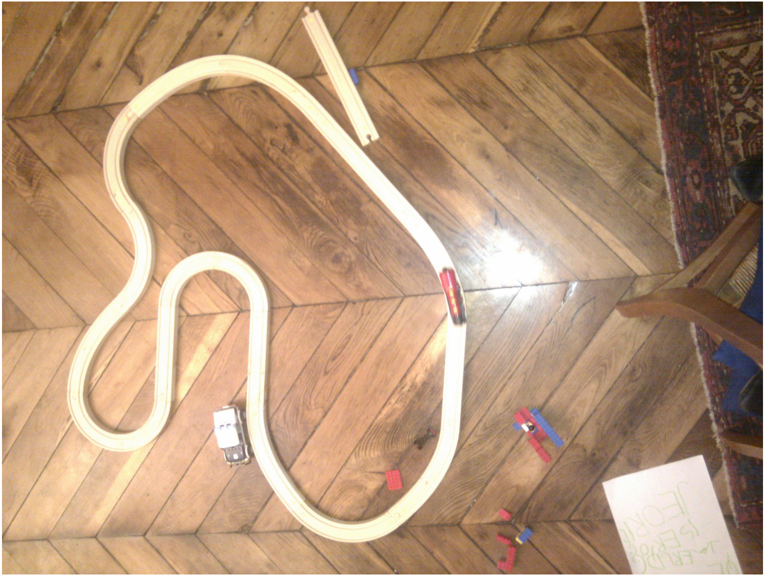
« But when you actually lay this track out usinng a CAD system, you get a much different story. The track doesn't meet, and it's also not aligned with the center of the viaduct. The Vario System is what makes this layout possible. » :



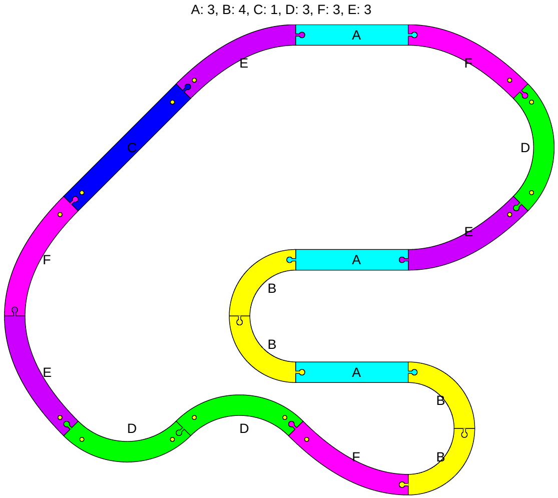
Un exemple de plan de train existant



Un exemple de circuit réalisé (A)



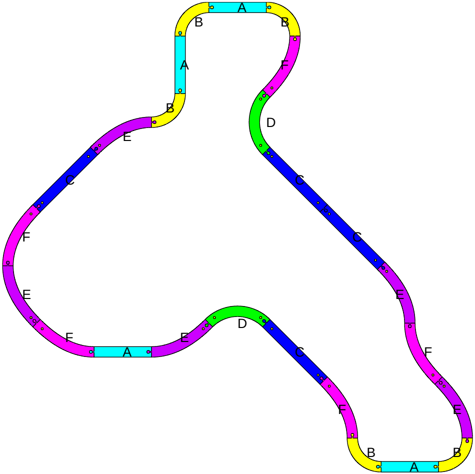
Le plan associé (A)



Un exemple de circuit réalisé (B)

Le plan associé (B)

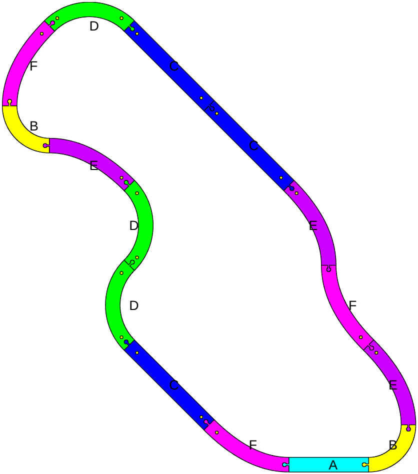
A: 4, B: 5, C: 4, D: 2, F: 5, E: 5



Un exemple de circuit réalisé (C)

Le plan associé (C)

A: 1, B: 2, C: 3, D: 3, F: 3, E: 3



Ce que permet le brevet

L'invention propose un circuit ou un ensemble de pièces de guidage qui :

- permet la réalisation d'un grand nombre de circuits fermés à partir du même ensemble de pièces,

Ce que permet le brevet

L'invention propose un circuit ou un ensemble de pièces de guidage qui :

- permet la réalisation d'un grand nombre de circuits fermés à partir du même ensemble de pièces,
- utilise un minimum de pièces de guidage différentes,

Ce que permet le brevet

L'invention propose un circuit ou un ensemble de pièces de guidage qui :

- permet la réalisation d'un grand nombre de circuits fermés à partir du même ensemble de pièces,
- utilise un minimum de pièces de guidage différentes,
- garantit qu'il est toujours possible de refermer simplement le circuit sur lui-même.

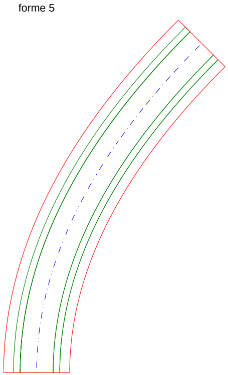
Ce que permet le brevet

L'invention propose un circuit ou un ensemble de pièces de guidage qui :

- permet la réalisation d'un grand nombre de circuits fermés à partir du même ensemble de pièces,
- utilise un minimum de pièces de guidage différentes,
- garantit qu'il est toujours possible de refermer simplement le circuit sur lui-même.

Typiquement, l'invention concerne le domaine des circuits de trains pour enfants. Elle peut concerner également le domaine des circuits de petites voitures ou similaires.

Idées de base



On se concentre sur la trajectoire décrite par la locomotive par exemple, soit encore sur la ligne médiane, tracée en pointillé sur la figure.

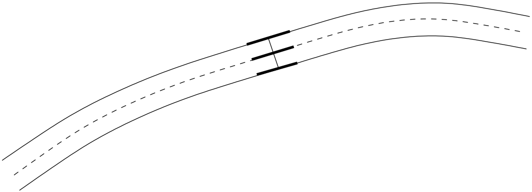
Idées de base

- On cherche à inscrire chacune de ces courbes dans une forme simple qui permette de paver le plan ;

Idées de base

- On cherche à inscrire chacune de ces courbes dans une forme simple qui permette de paver le plan ;
- De plus, il est nécessaire qu'une fois le pavage réalisé, la courbe construite soit de classe $\mathcal{C}^1$.

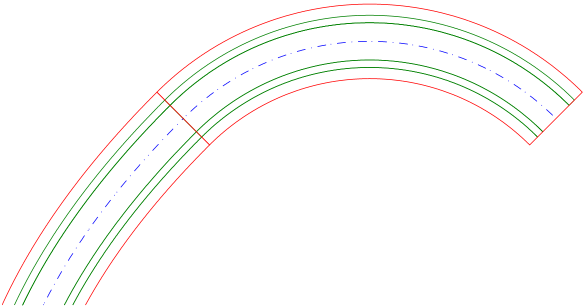
Pourquoi $\mathcal{C}^1$?



La ligne médiane est $\mathcal{C}^1$ ce qui assure la continuité de la vitesse du véhicule empruntant le circuit.
Mais aussi, les bords des rails sont perpendiculaires à cette ligne médiane, donc parallèles entre eux, ce qui assure l'encastrement parfait de deux rails contigus !

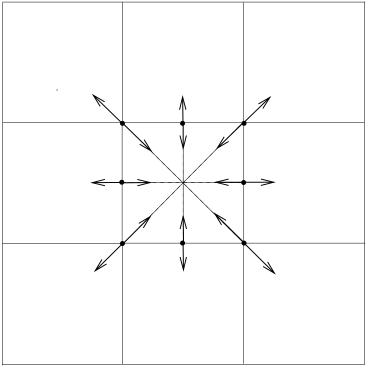
Pourquoi $\mathcal{C}^1$?

Raccord 5−4



Exemple de bon raccord.

Utilisation du pavage carré du plan et des huits points associés



Si on représente le carré de base et ses huit voisins, huit points particuliers apparaissent : les quatre sommets du carrés et les quatre milieux de cotés.

Utilisation du pavage carré du plan et des huits points associés

On imposera donc à chaque portion de la trajectoire :

- d'être contenue dans le carré,

Utilisation du pavage carré du plan et des huits points associés

On imposera donc à chaque portion de la trajectoire :

- d'être contenue dans le carré,
- de débuter sur un sommet du carré ou un milieu d'un côté du carré en un point A et de se terminer sur un autre sommet du carré ou un milieu d'un autre côté du carré en un point B,

Utilisation du pavage carré du plan et des huits points associés

On imposera donc à chaque portion de la trajectoire :

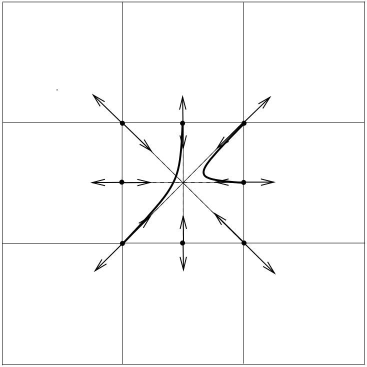
- d'être contenue dans le carré,
- de débuter sur un sommet du carré ou un milieu d'un côté du carré en un point A et de se terminer sur un autre sommet du carré ou un milieu d'un autre côté du carré en un point B,
- d'être tangente en A et en B aux droites reliant respectivement le centre du carré aux points A et B,

Utilisation du pavage carré du plan et des huits points associés

On imposera donc à chaque portion de la trajectoire :

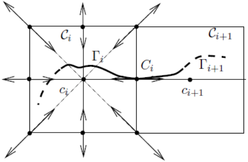
- d'être contenue dans le carré,
- de débuter sur un sommet du carré ou un milieu d'un côté du carré en un point A et de se terminer sur un autre sommet du carré ou un milieu d'un autre côté du carré en un point B,
- d'être tangente en A et en B aux droites reliant respectivement le centre du carré aux points A et B,
- de se finir dans là où commence la portion de trajectoire du carré suivant.

Utilisation du pavage carré du plan et des huits points associés

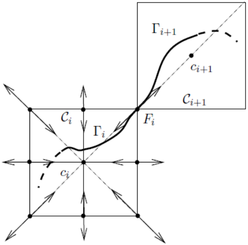


Deux exemples de courbe

Utilisation du pavage carré du plan et des huits points associés



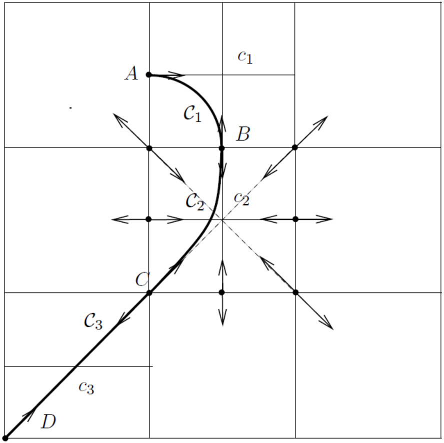
(a) Cas : $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_{i+1}$ ont un côté en commun



(b) Cas : $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_{i+1}$ ont un sommet en commun.

Ainsi, si une boucle est refermée, la trajectoire est assurée d'être continue et dérivable au premier et dernier point et l'encastrement est donc parfait !

Nouvel exemple de bon raccord



Nombre de courbes nécessaires

- Chacun des huits points (sommets ou milieux) doit être relié une fois seulement aux autres ! Donc, il faut $C_8^2 = 28$ courbes, ce qui est beaucoup trop élevé si elles sont toutes différentes.

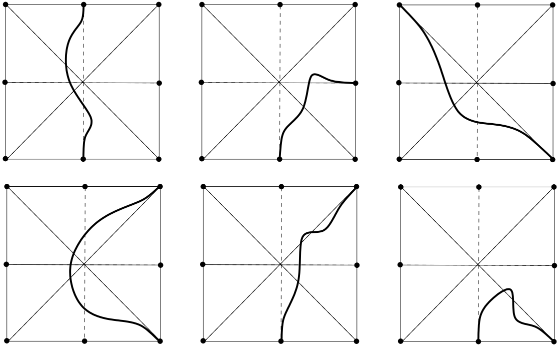
Nombre de courbes nécessaires

- Chacun des huits points (sommets ou milieux) doit être relié une fois seulement aux autres ! Donc, il faut $C_8^2 = 28$ courbes, ce qui est beaucoup trop élevé si elles sont toutes différentes.
- Si on enlève les 8 trajets reliant chaque point à son voisin immédiat, il ne faut plus que $28 - 8 = 20$ courbes.

Nombre de courbes nécessaires

- Chacun des huits points (sommets ou milieux) doit être relié une fois seulement aux autres ! Donc, il faut $C_8^2 = 28$ courbes, ce qui est beaucoup trop élevé si elles sont toutes différentes.
- Si on enlève les 8 trajets reliant chaque point à son voisin immédiat, il ne faut plus que $28 - 8 = 20$ courbes.
- Du fait des isométries laissant le carré invariant, il suffit de construire 5 ou 6 courbes.

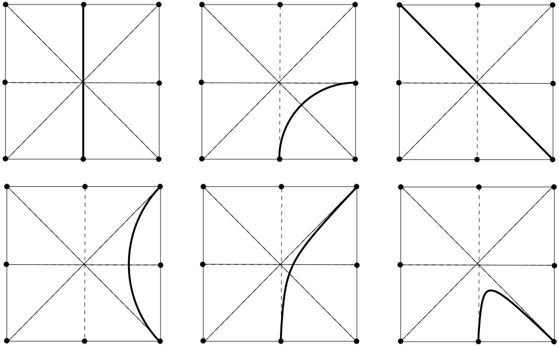
Six courbes quelconques



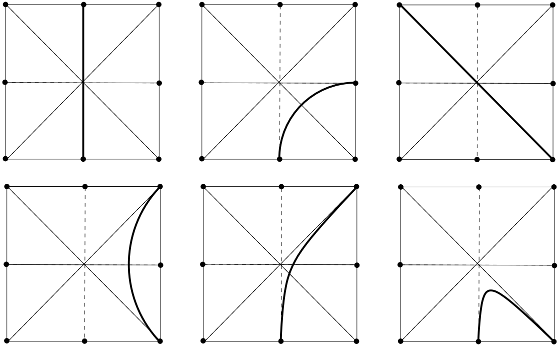
Les six courbes choisies

- Deux segments de droites ;
- Deux quarts de cercles ;
- Deux autres courbes, définies par deux points et deux tangentes. $\Longrightarrow$ Une portion de parabole.

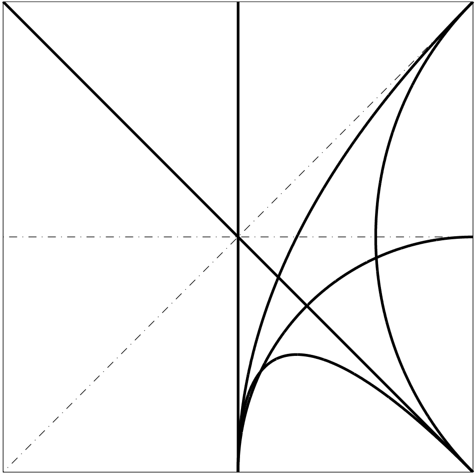
Les six courbes choisies



Les six courbes choisies



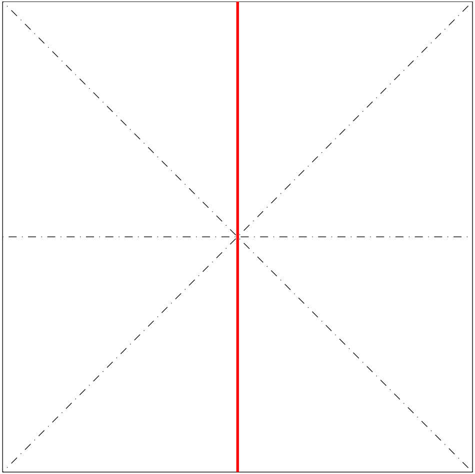
Ensemble des courbes retenues



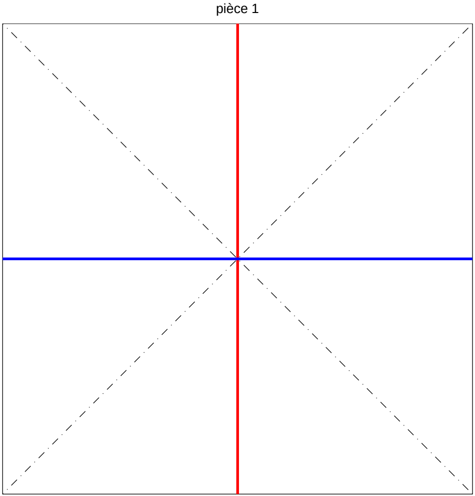
passer les figures

Images de ces courbes par les isométries

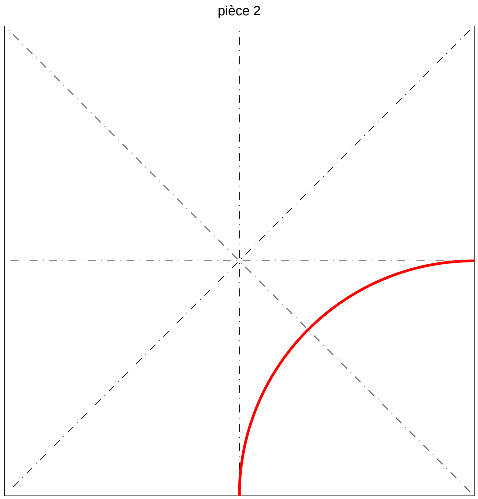
pièce 1



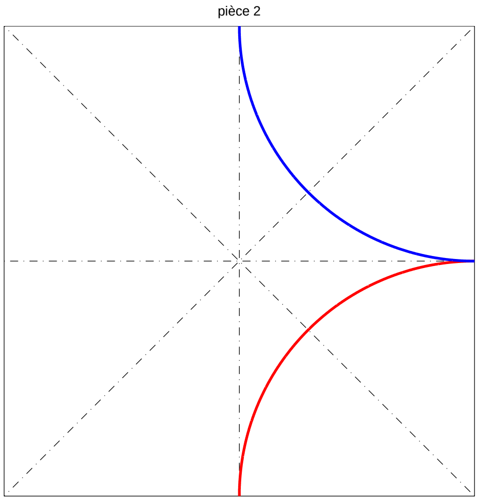
Images de ces courbes par les isométries



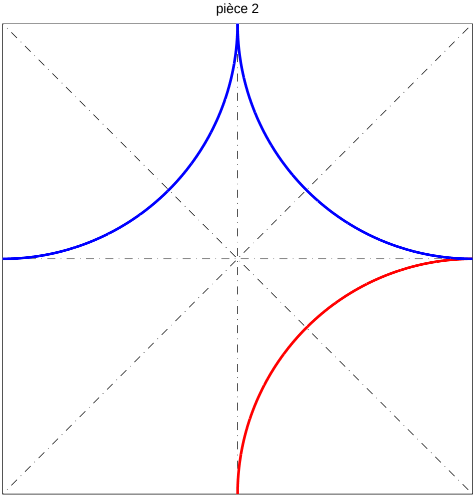
Images de ces courbes par les isométries



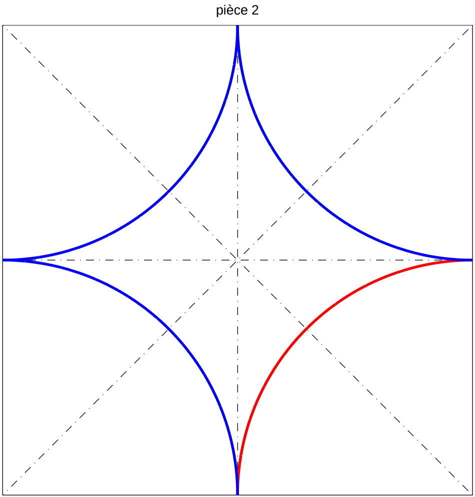
Images de ces courbes par les isométries



Images de ces courbes par les isométries

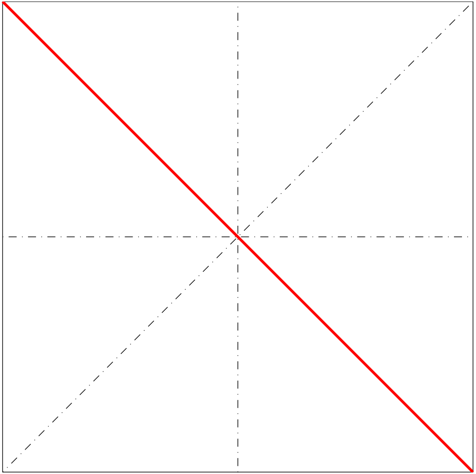


Images de ces courbes par les isométries



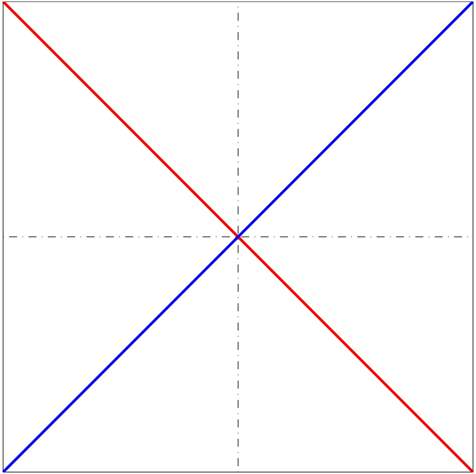
Images de ces courbes par les isométries

pièce 3



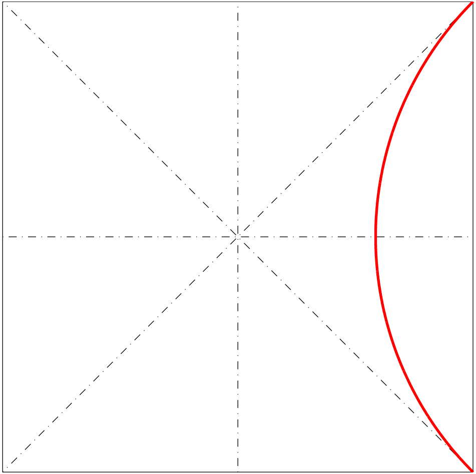
Images de ces courbes par les isométries

pièce 3

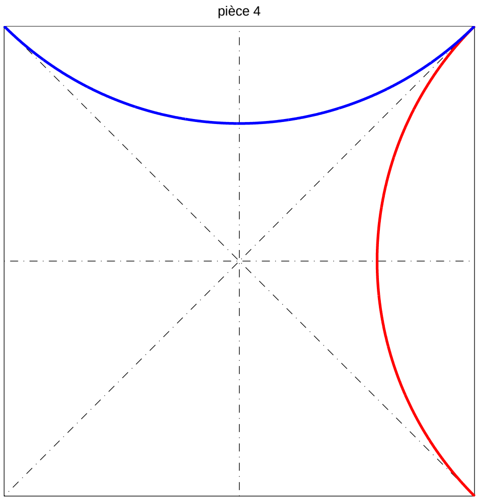


Images de ces courbes par les isométries

pièce 4

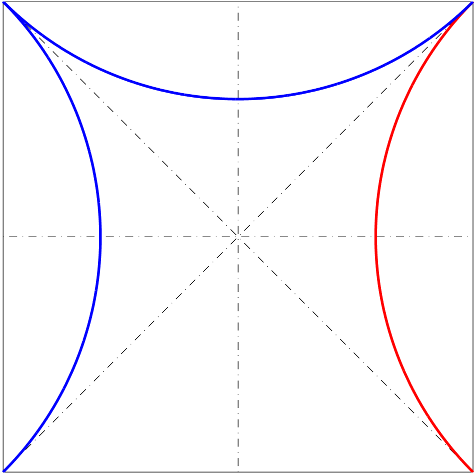


Images de ces courbes par les isométries

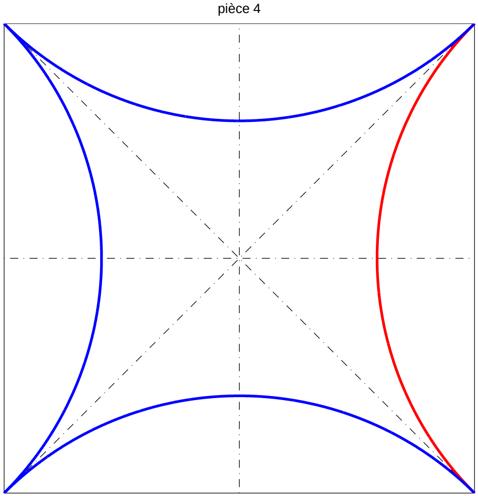


Images de ces courbes par les isométries

pièce 4

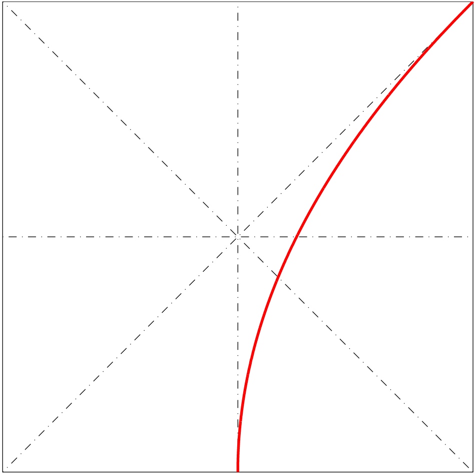


Images de ces courbes par les isométries



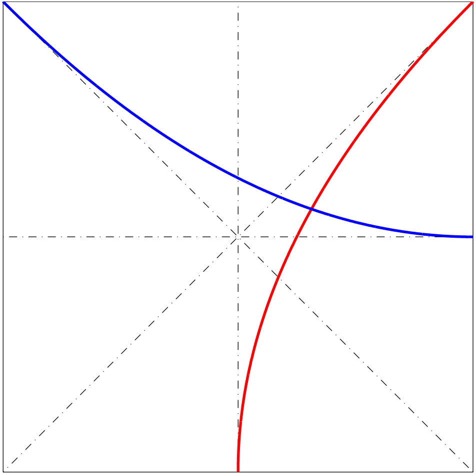
Images de ces courbes par les isométries

pièce 5

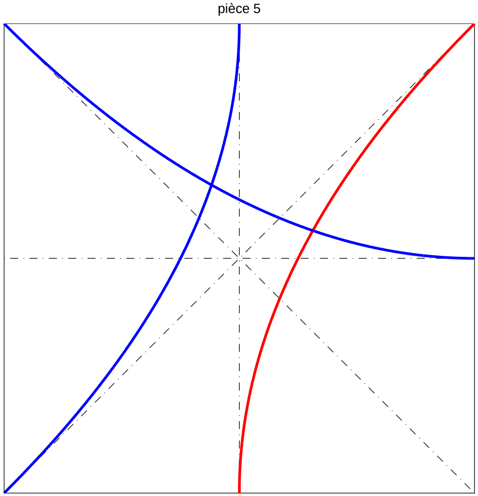


Images de ces courbes par les isométries

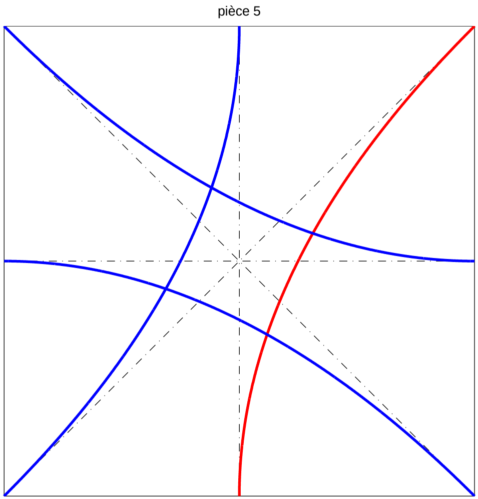
pièce 5



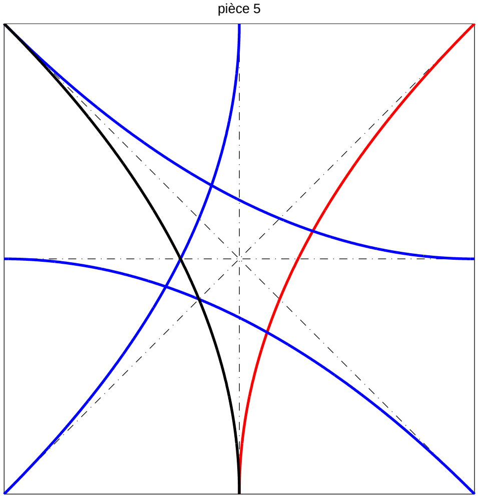
Images de ces courbes par les isométries



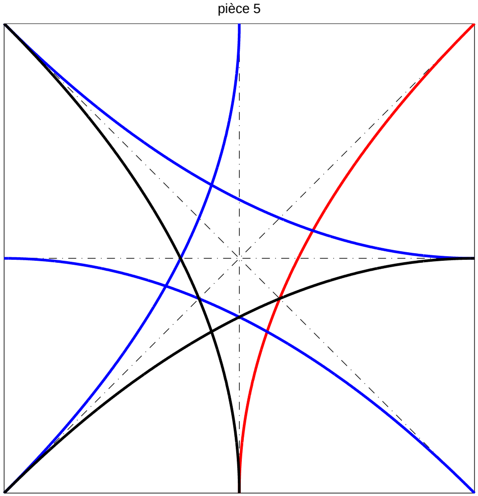
Images de ces courbes par les isométries



Images de ces courbes par les isométries

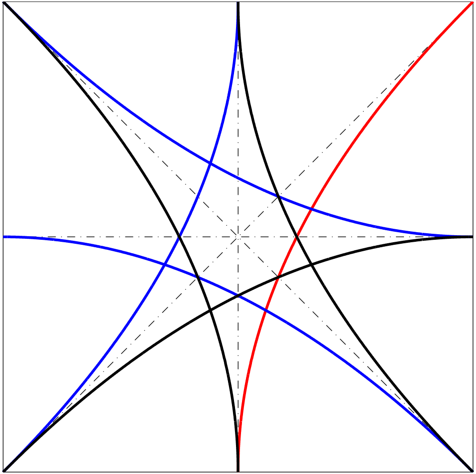


Images de ces courbes par les isométries

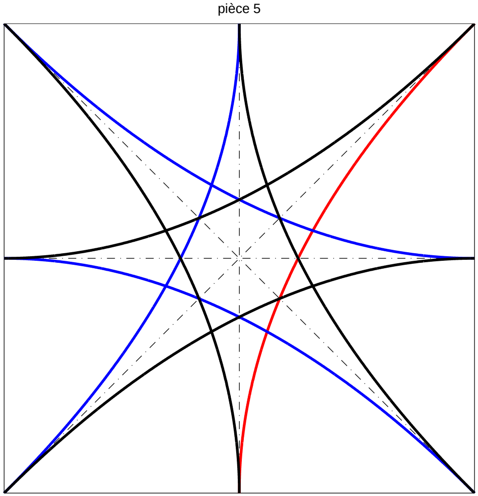


Images de ces courbes par les isométries

pièce 5

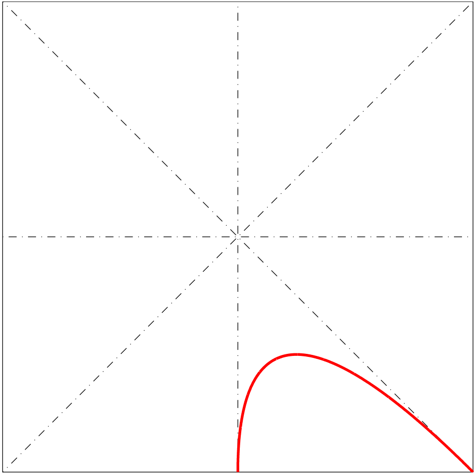


Images de ces courbes par les isométries

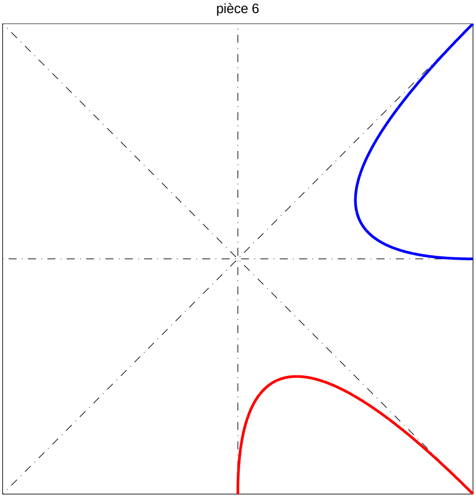


Images de ces courbes par les isométries

pièce 6

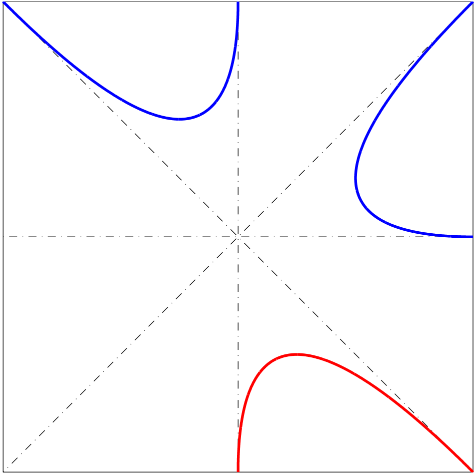


Images de ces courbes par les isométries



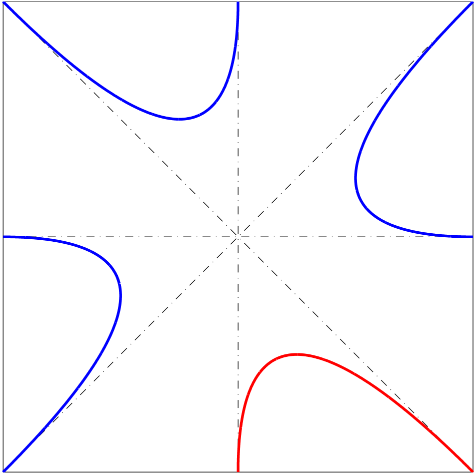
Images de ces courbes par les isométries

pièce 6

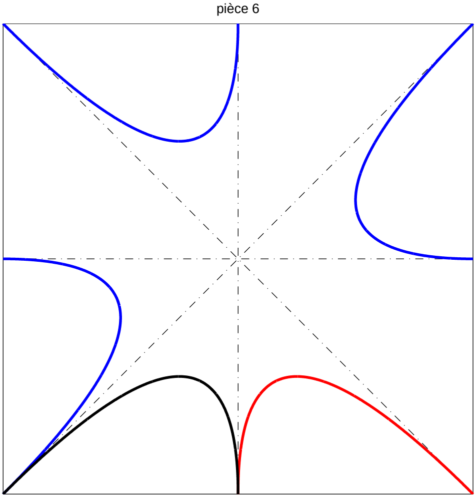


Images de ces courbes par les isométries

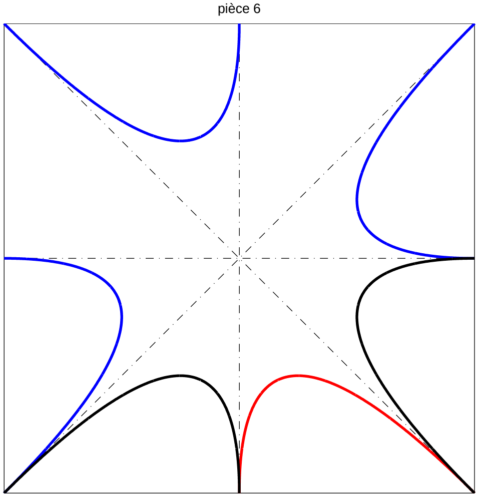
pièce 6



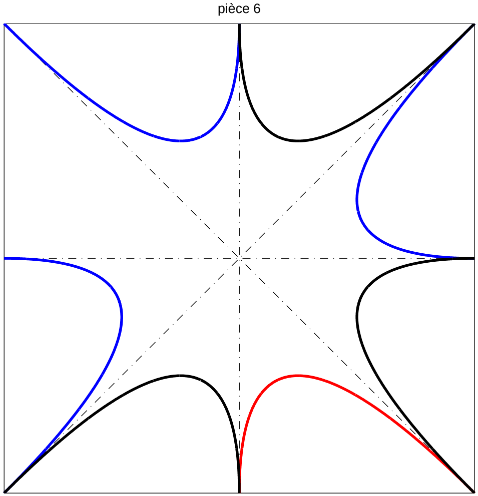
Images de ces courbes par les isométries



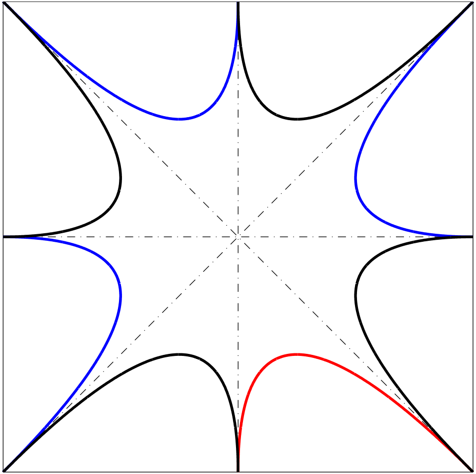
Images de ces courbes par les isométries



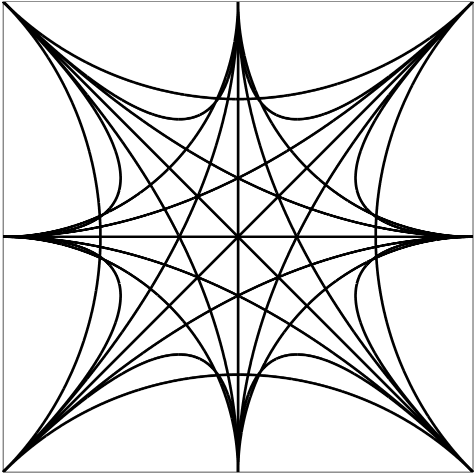
Images de ces courbes par les isométries



Images de ces courbes par les isométries

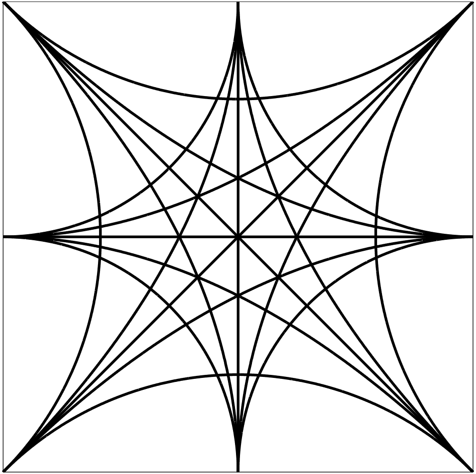


Ensemble des courbes possibles



$\Longrightarrow$ 28 courbes possibles !

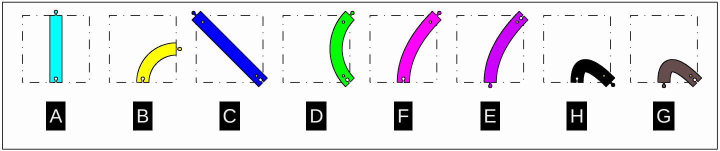
Ensemble des courbes possibles



En enlevant les 8 pièces 6, restent $28 - 8 = 20$ courbes possibles !

revenir au début des figures

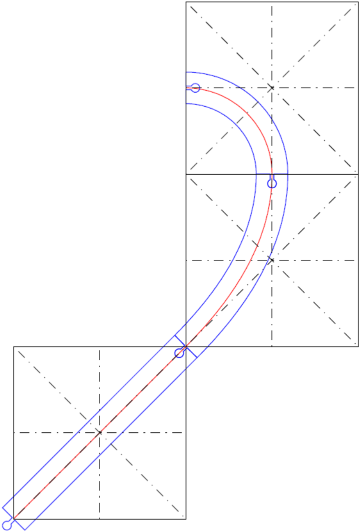
Les six types de rails construits



Fabrication finale des prototypes

Les prototypes en bois ont été réalisés par l'entreprise AS'Bois à Saint-Julien sur Suran (Jura, `http://www.as-bois.fr`).

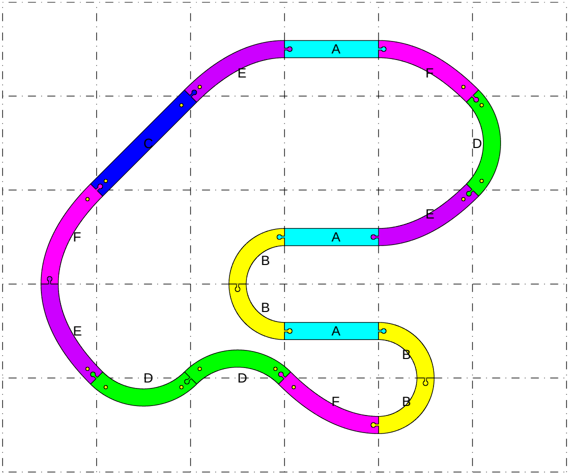
Nouvel exemple de bon raccord



Voir la courbe théorique

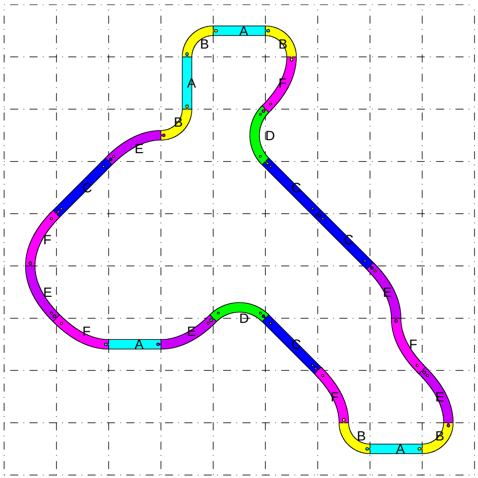
Retour sur le circuit (A)

A: 3, B: 4, C: 1, D: 3, F: 3, E: 3



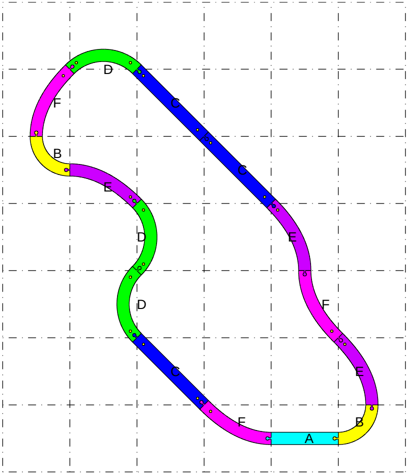
Retour sur le circuit (B)

A: 4, B: 5, C: 4, D: 2, F: 5, E: 5

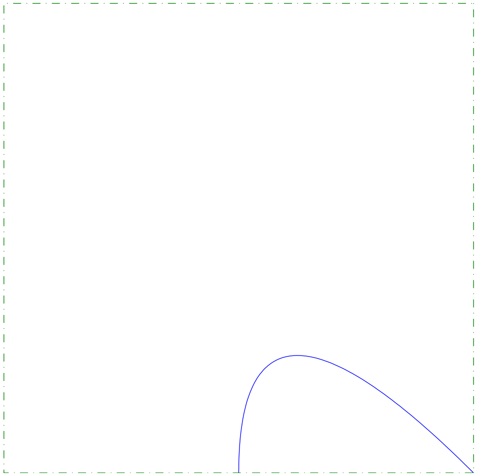


Retour sur le circuit (C)

A: 1, B: 2, C: 3, D: 3, F: 3, E: 3

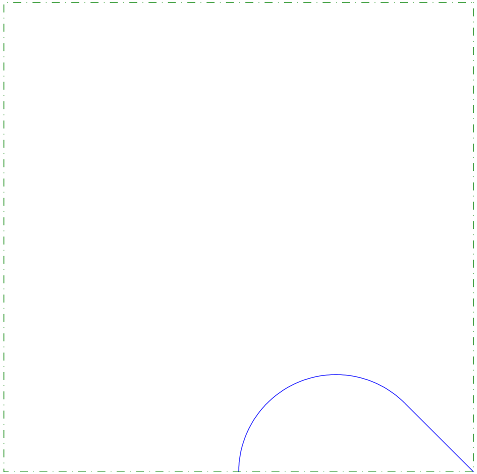


Utlisation d'une courbe de Dubins (pour la dernière forme)



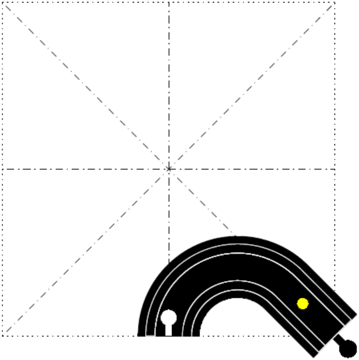
Définition avec une parabole.

Utlisation d'une courbe de Dubins (pour la dernière forme)

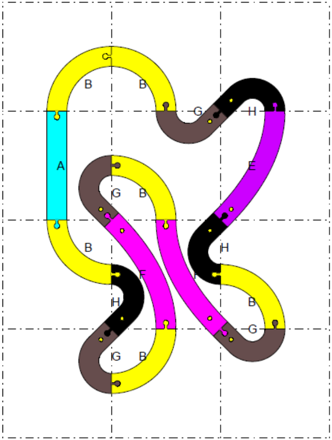


Définition optimale avec une courde de Dubins [Bas21].

Utlisation d'une courbe de Dubins (pour la dernière forme)



(a) La forme optimale.



(b) Un exemple de circuit avec la pièce 6 optimale.

Sommaire

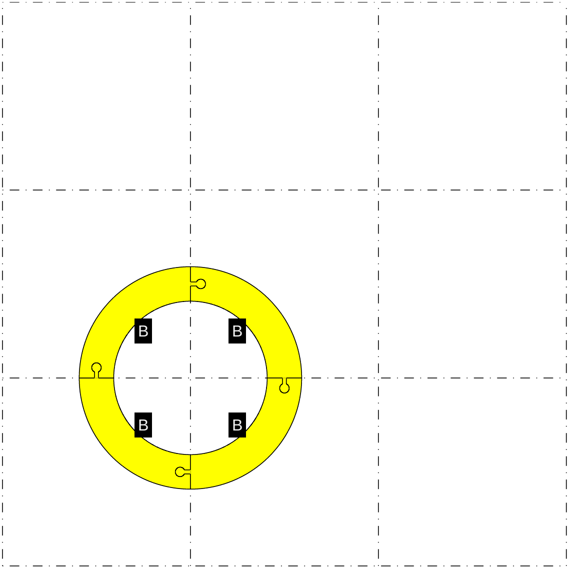
Matériel disponible

1. Une voire plusieurs boites de rails en bois ;
2. Un grand poster représentant les carrés auxquels appartiennent ces rails en bois ;
3. Des cartes en carton ou en plexiglas, de taille réduite chacune d'elles, de forme carré, représente le carré de base et le rail correspondant ;
4. Un support en bois permet d'agencer les cartes en carton, en les fixant ;
5. Logiciels ;
6. On pourra faire appel à la référence [Bas15] disponibles sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/catalogue_exhaustif_11rails.pdf` et que l'on pourra projeter.

Matériel disponible
Énumération

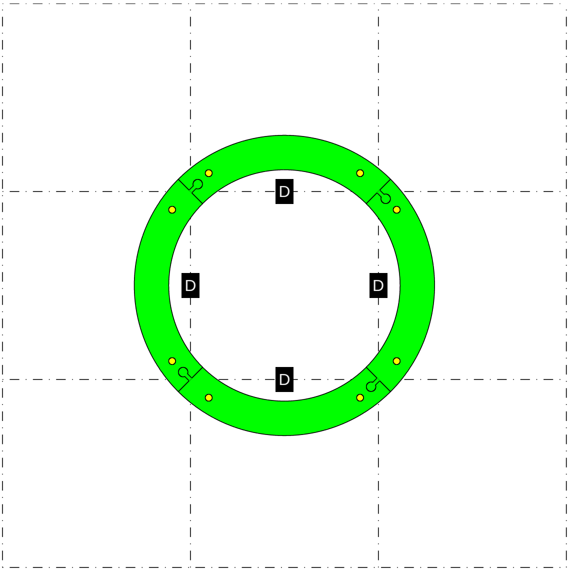
passer les circuits

Tous les 2 circuits retenus sur les 400 circuits possibles



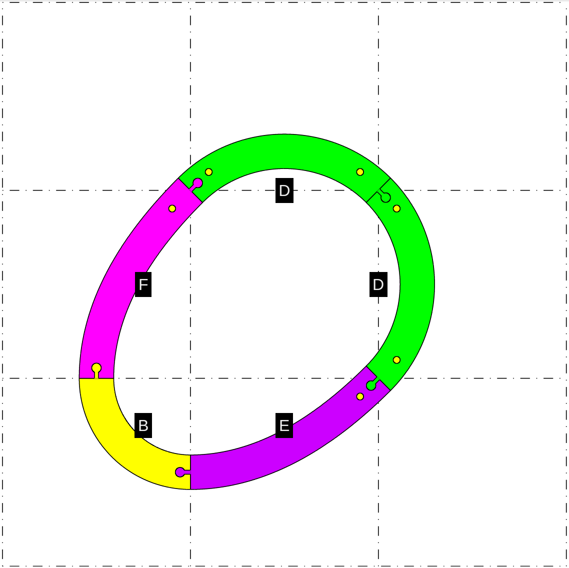
circuit 1/2

Tous les 2 circuits retenus sur les 400 circuits possibles

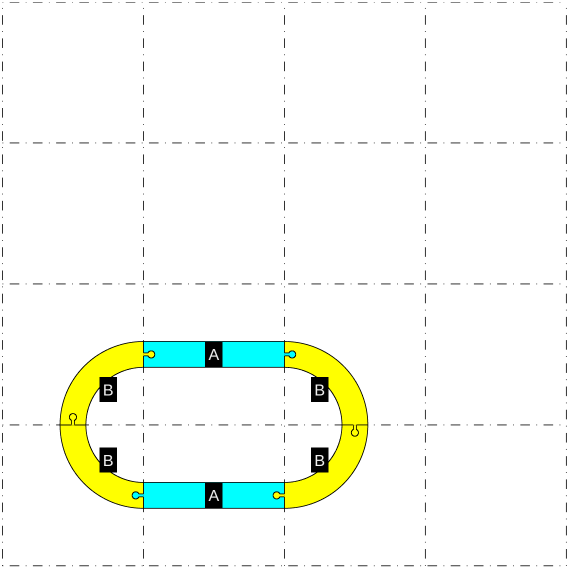


circuit 2/2

Le seul circuit retenu sur les 2000 circuits possibles

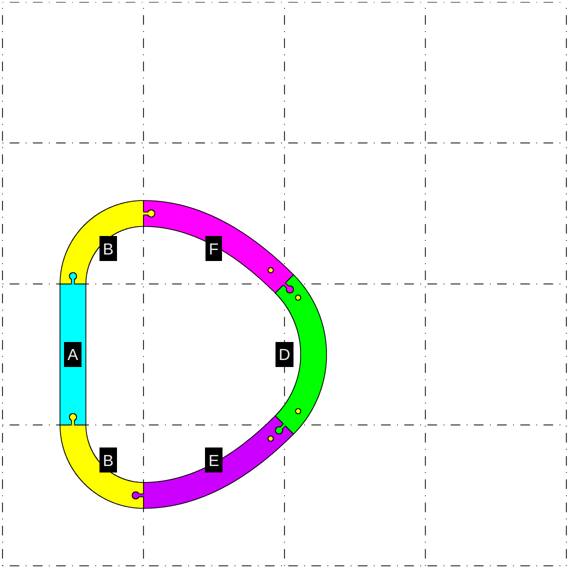


Tous les 5 circuits retenus sur les 10000 circuits possibles



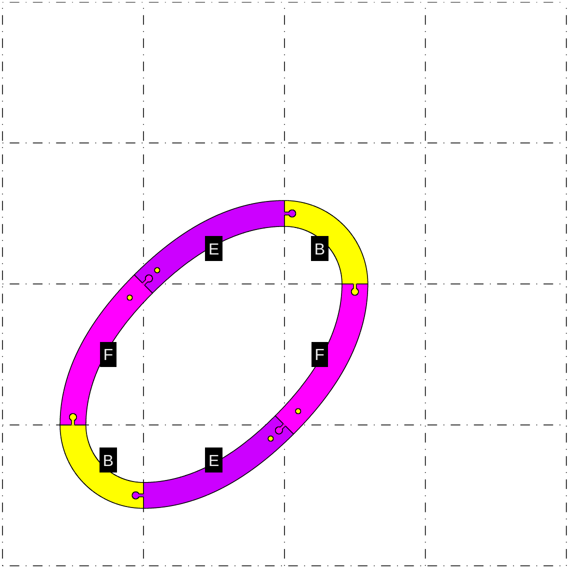
circuit 1/5

Tous les 5 circuits retenus sur les 10000 circuits possibles



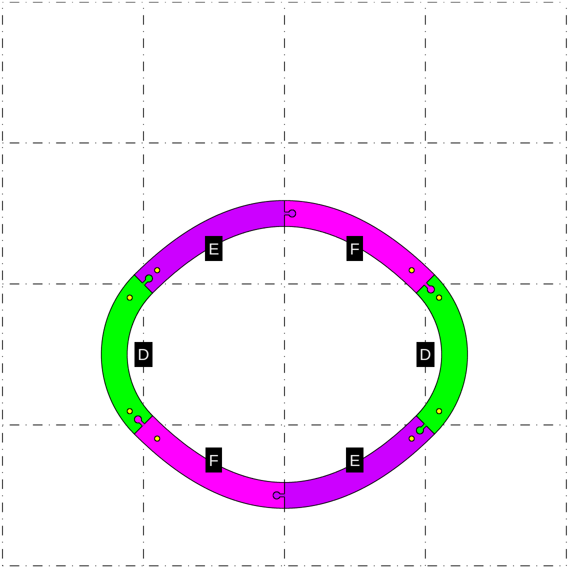
circuit 2/5

Tous les 5 circuits retenus sur les 10000 circuits possibles



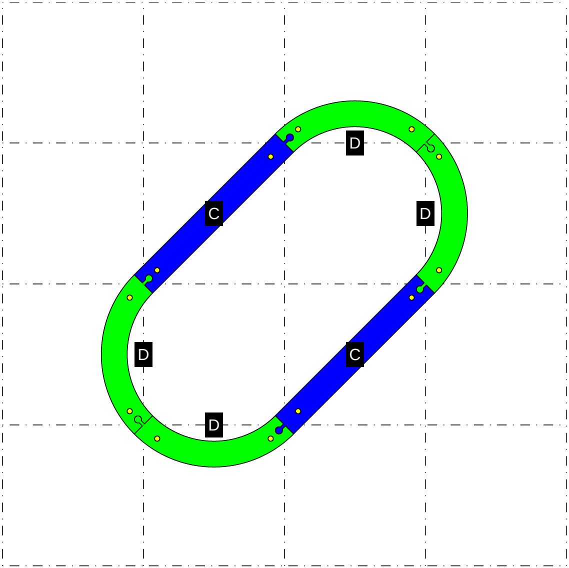
circuit 3/5

Tous les 5 circuits retenus sur les 10000 circuits possibles



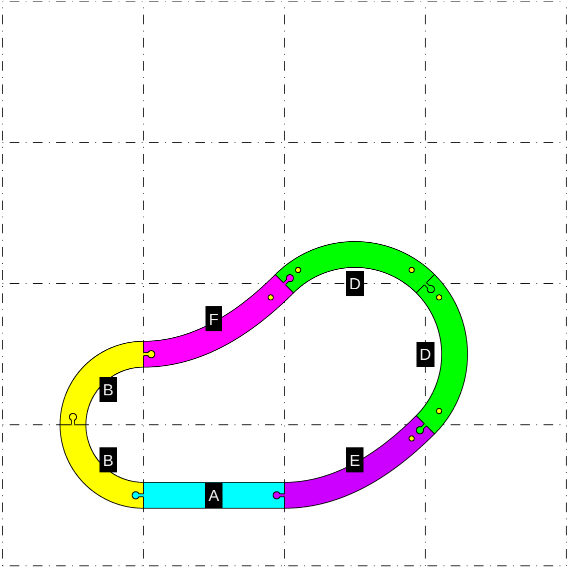
circuit 4/5

Tous les 5 circuits retenus sur les 10000 circuits possibles



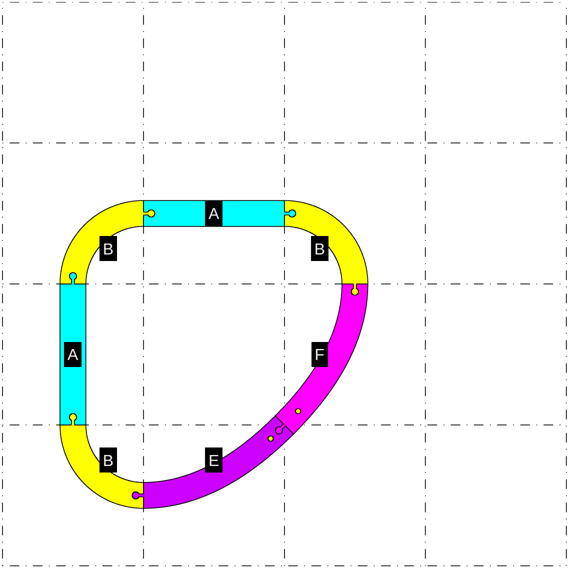
circuit 5/5

Tous les 6 circuits retenus sur les 50000 circuits possibles



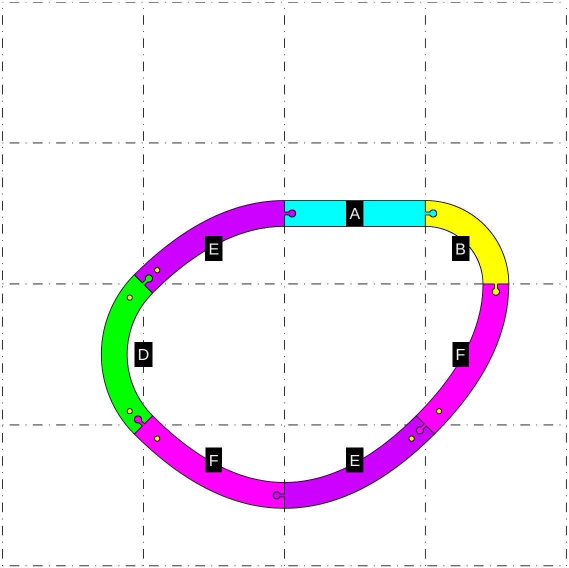
circuit 1/6

Tous les 6 circuits retenus sur les 50000 circuits possibles



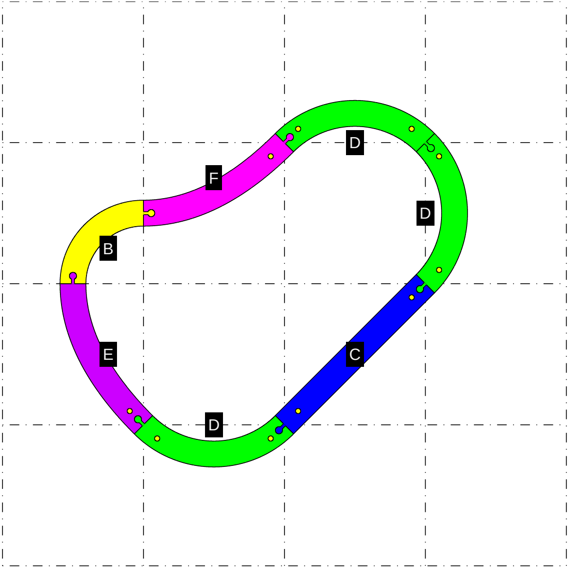
circuit 2/6

Tous les 6 circuits retenus sur les 50000 circuits possibles



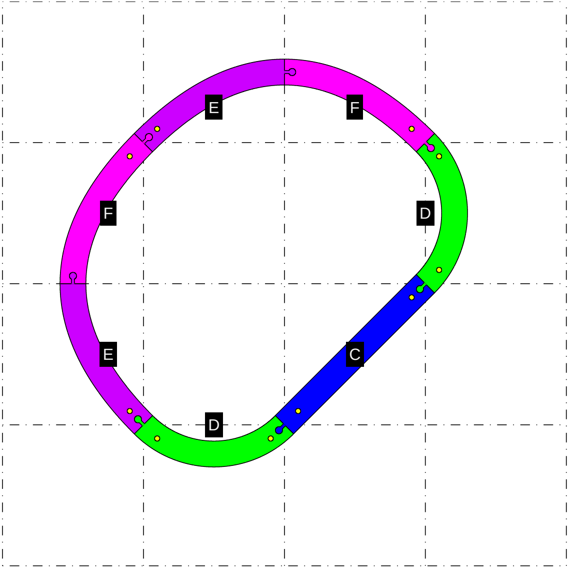
circuit 3/6

Tous les 6 circuits retenus sur les 50000 circuits possibles



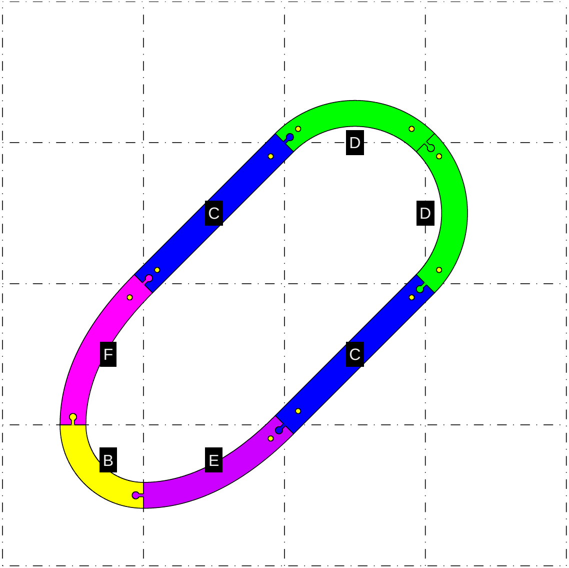
circuit 4/6

Tous les 6 circuits retenus sur les 50000 circuits possibles



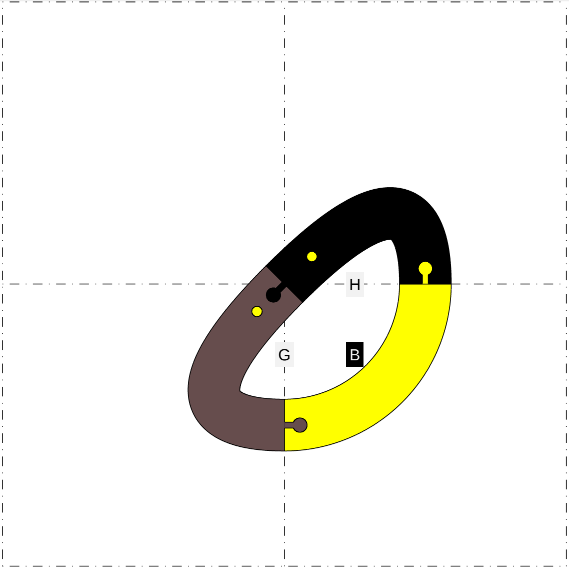
circuit 5/6

Tous les 6 circuits retenus sur les 50000 circuits possibles

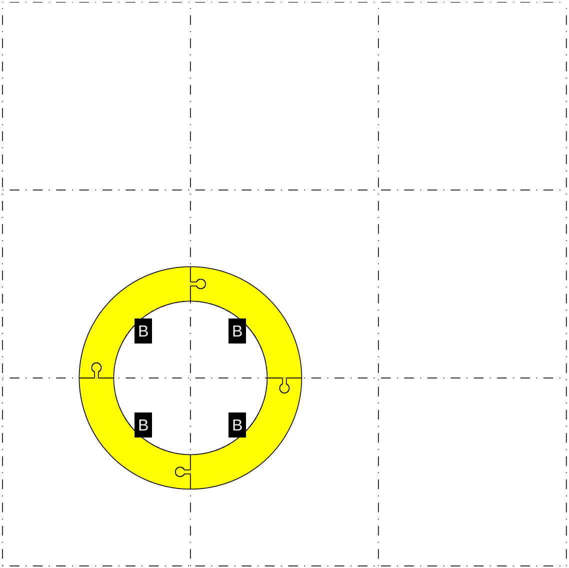


circuit 6/6

Le seul circuit retenu sur les 112 circuits possibles

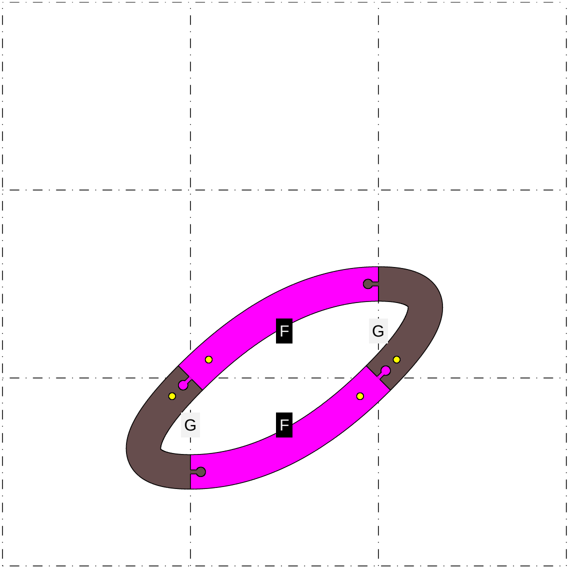


Tous les 4 circuits retenus sur les 784 circuits possibles



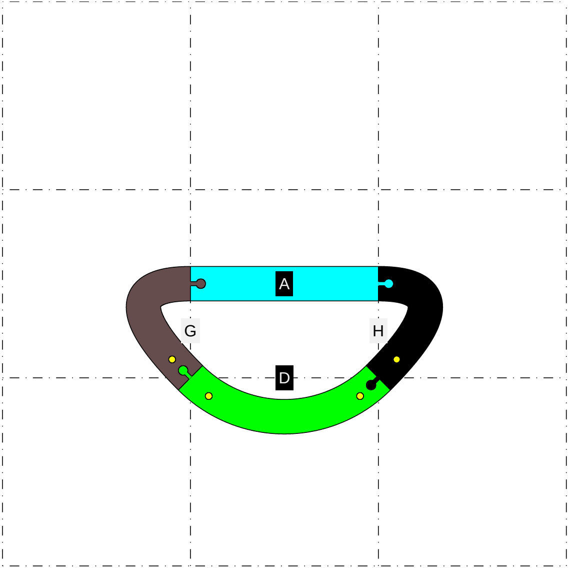
circuit 1/4

Tous les 4 circuits retenus sur les 784 circuits possibles



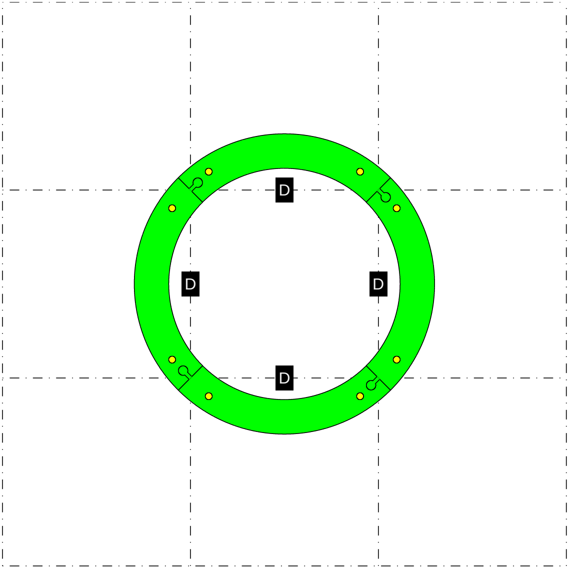
circuit 2/4

Tous les 4 circuits retenus sur les 784 circuits possibles



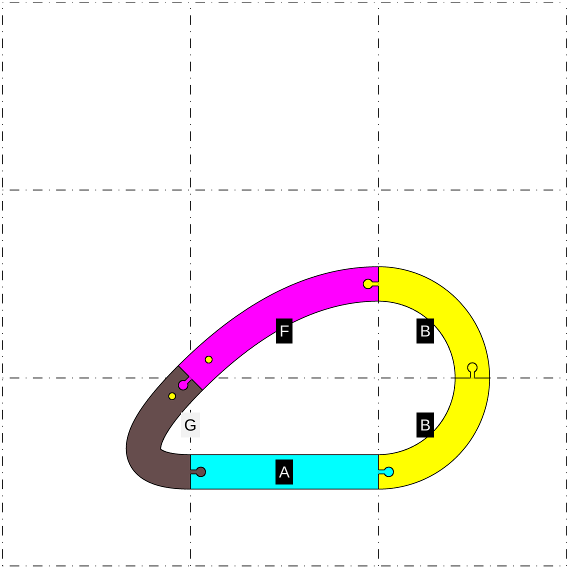
circuit 3/4

Tous les 4 circuits retenus sur les 784 circuits possibles



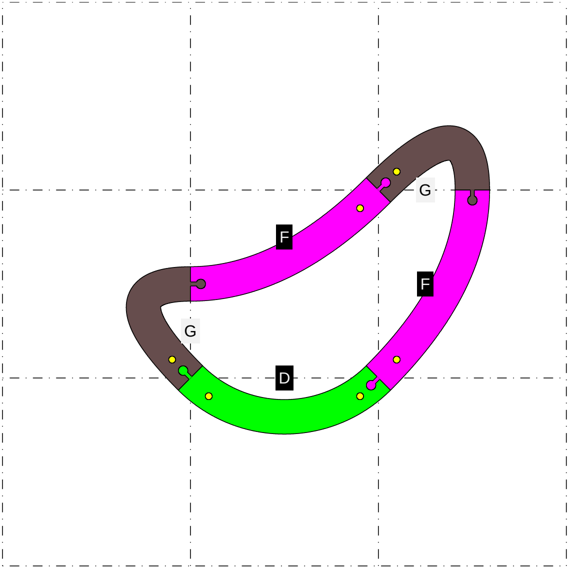
circuit 4/4

Tous les 5 circuits retenus sur les 5488 circuits possibles



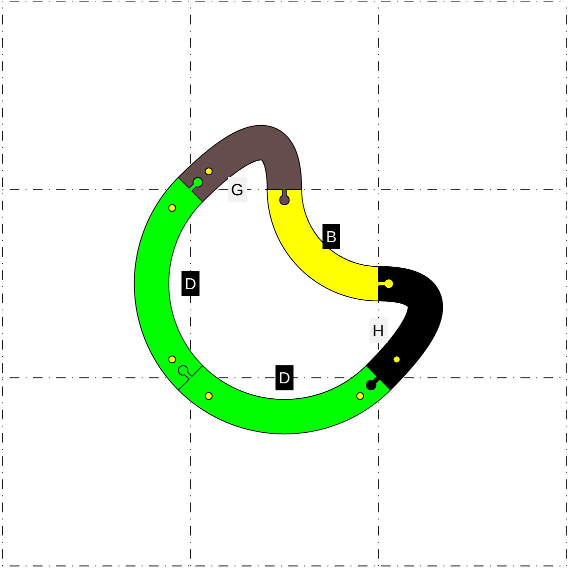
circuit 1/5

Tous les 5 circuits retenus sur les 5488 circuits possibles



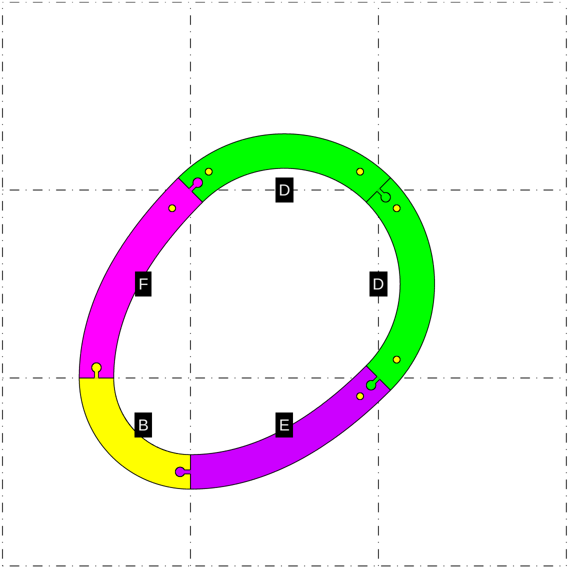
circuit 2/5

Tous les 5 circuits retenus sur les 5488 circuits possibles



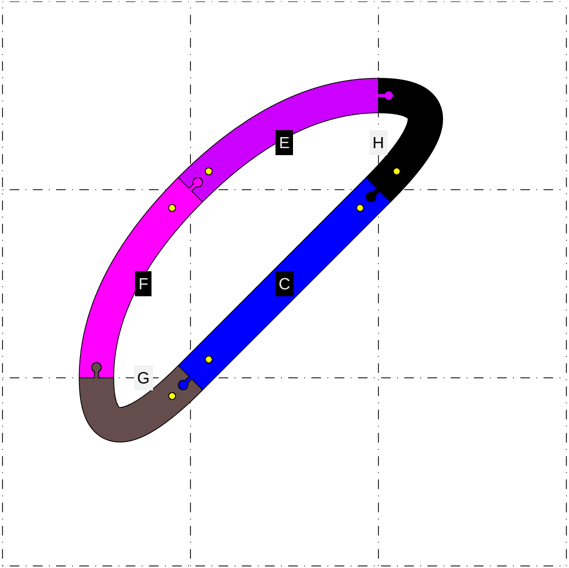
circuit 3/5

Tous les 5 circuits retenus sur les 5488 circuits possibles



circuit 4/5

Tous les 5 circuits retenus sur les 5488 circuits possibles



circuit 5/5

Énumération

revenir au début les circuits

Matériel disponible

Nombre de circuits ([Bas16 ; Bas17] et derniers calculs plus récents)

N	$N_j = +\infty$	$N_j = 4$
4	2	2
5	1	1
6	5	5
7	7	6
8	33	28
9	74	63
10	304	244
11	986	753
12	3896	2792
13	14461	9551
14	57191	33649
15	223821	113631
16	895301	368120
17	2899363*	1043599*
18	225027*	5168*

Matériel disponible (logiciels)

Quelques logiciels ont été réalisés, permettant de créer, par simples clics, des plans de circuits puis éventuellement de les exporter en pdf.

Matériel disponible (logiciels)

Quelques logiciels ont été réalisés, permettant de créer, par simples clics, des plans de circuits puis éventuellement de les exporter en pdf.

Ces logiciels et la documentation sont distribués (uniquement pour Windows 7 ou XP et 10) et sont disponibles sur Internet. Liens des executables (attention, nécessite l'installation d'une librairie) et de la documentation disponibles sur demande.

Matériel disponible (logiciels)

Quelques logiciels ont été réalisés, permettant de créer, par simples clics, des plans de circuits puis éventuellement de les exporter en pdf.

Ces logiciels et la documentation sont distribués (uniquement pour Windows 7 ou XP et 10) et sont disponibles sur Internet. Liens des executables (attention, nécessite l'installation d'une librairie) et de la documentation disponibles sur demande.

Démontration : lancer `creecircuitwin7.exe` (pour Windows 7), `creecircuit.exe` ou `creecircuitps.exe` (pour Windows 10).

Un des jeux

1. Faire quelques circuits avec les différents matériels (les comparer entre eux !).
2. Créer tous les circuits avec un petit nombre de rails donnés à l'avance !

Sommaire

Liste non exhaustives des notions couvertes

1. carré, diagonale, médiane ;
2. symétrie axiale ;

1. théorème de Pythagore ;
2. droites et cercles ;
3. tangente à un cercle ;
4. rotation, symétrie axiale, centrale ;
5. homothétie ;
6. problèmes des "tchings" (notions de base de dénombrement) ;
7. pavage ?

1. vitesse, dérivée, tangente à une courbe ;
2. transformation du plan, isométrie ;
3. parabole, construction d'une parabole par "fils" ;
4. fonction convexe (terminale) ;
5. nombre complexe (pour exprimer une rotation) ;

1. continuité et continuité de la dérivée ;
2. courbes paramétrées ;
3. courbes paramétrée $\mathcal{C}^{\mathbf{1}}$, $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ par morceaux ;
4. courbes de Bézier, définition et construction d'une parabole par fils (bis) ;
5. interpolation d'Hermite ;
6. construction intrinsèque d'une parabole (par foyer, directrice) ; propriété des rayons issus de l'infini passant par le foyer
7. rayon de courbure, accélération normale, repère de Frenet ;
8. clothoïdes ;
9. isométrie directe ou indirecte, groupes d'isométries du carré, groupe opérant sur un ensemble ;
10. similitude ;
11. nombre complexe (pour exprimer une rotation et une similitude) ;
12. relation d'équivalence, classe d'équivalence ;
13. construction de pièces par CAO ;
14. chemins et polygones auto-évitants ;
15. courbes de Dubins.

Principe

- Proposer des activités plus ou moins ludiques, selon le niveau (secondaire), pour faire (re)découvrir certaines notions de maths.

Principe

- Proposer des activités plus ou moins ludiques, selon le niveau (secondaire), pour faire (re)découvrir certaines notions de maths.
- Les rails et les différents matériels permettent de toucher du doigt, au sens propre du terme, un certain nombre de notions.

Principe

- Proposer des activités plus ou moins ludiques, selon le niveau (secondaire), pour faire (re)découvrir certaines notions de maths.
- Les rails et les différents matériels permettent de toucher du doigt, au sens propre du terme, un certain nombre de notions.
- Donner aussi envie, par la suite, aux plus petits, de jouer réellement avec les rails !

Principe

Pour tous les exercices de géométrie, on pourra faire tracer les figures à l'échelle 1, en prenant comme coté réel du carré :

$$L = 21.8\,\text{cm}, \tag{1}$$

et comme largeur de rails

$$l = 4\,\text{cm}, \tag{2}$$

ce qui exige de grandes feuilles mais cela permet aux participants de superposer les rails réels avec leur figure. On pourra aussi choisir de les faire en taille réduite.

Principe

Pour tous les exercices de géométrie, on pourra faire tracer les figures à l'échelle 1, en prenant comme coté réel du carré :

$$L = 21.8\,\mathrm{cm}, \tag{1}$$

et comme largeur de rails

$$l = 4\,\mathrm{cm}, \tag{2}$$

ce qui exige de grandes feuilles mais cela permet aux participants de superposer les rails réels avec leur figure. On pourra aussi choisir de les faire en taille réduite.

Chacune des opérations de géométrie qui sera faite (symétrie, rotation ...) pourra être simulaténement montrée sur les rails en eux-même, qui pourront être aussi posés sur les figures réalisées si celles-là sont à l'échelle 1.

Partie commune purement "ludique" (collège)

- Manipulation sur différents matériels qu'ils pourront échanger ;
- Ne pas montrer l'appartenance de chacun des rails à un carré, contrainte qu'il peut être difficile d'appréhender dans les petites classes ;
- Cependant, on pourra utiliser les circuits construits et les poser sur le poster afin de montrer que chaque rail appartient à un carré et que ses extrémités sont soit au milieu d'un coté soit à un sommet du carré.

Partie commune purement "ludique" (collège)

- Manipulation sur différents matériels qu'ils pourront échanger ;
- Ne pas montrer l'appartenance de chacun des rails à un carré, contrainte qu'il peut être difficile d'appréhender dans les petites classes ;
- Cependant, on pourra utiliser les circuits construits et les poser sur le poster afin de montrer que chaque rail appartient à un carré et que ses extrémités sont soit au milieu d'un coté soit à un sommet du carré.
- On pourra aussi faire comparer des circuits éventuels identiques mais réalisés par les différents matériels. Pour les classes de 4^{e} et de 3^{e}, on pourra faire mesurer les longueurs des pièces rectilignes et les rayons des pièces circulaires (montrer qu'elles le sont).
- Faire constater, par exemple en les retournant, que les pièces B et D sont symétriques (par rapport à leur plan médian) tandis que les pièces E et F ne le sont pas, ce qui leur interdit d'être circulaires.

Partie commune purement "ludique" (lycée)

- Reprendre plus rapidement la séquence précédente ;
- Leur faire construire de façon exhaustive tous les circuits possibles avec un petit nombre de rails. Une aide pourra être apporté en leur montrant qu'il suffit de placer dans un premier temps les carrés pour ensuite à n'avoir plus que les rails à placer, dans chaque carré.
- Introduire dans cet exercice, la notion de circuit identique, à un "déplacement", un "retournement" près ou un sens de parcouru opposé.
- Évoquer éventuellement la notion de relation et de classe d'équivalence.
- Faire récapituler les propriétés utilisées et observées par les élèves (par leur propres mots et en remplaçant (ou pas !) par exemple "déplacement" et "retournement" par isométrie directe et indirecte).

Partie commune purement "ludique" (lycée)

Ici, on a utilisé des mathématiques existantes pour créer un objet théorique, qui a ensuite été fabriqué, pour répondre à une problématique : permettre l'assemblage correct de toutes les pièces du circuit quelle que soit la configuration adoptée. Des "outils" mathématiques ont été utilisés. Mais la plupart de ces outils (interpolation, dérivation, courbe d'ajustement ....) ont eux-mêmes été créés pour répondre à une problématique ou un problème technologique donné.

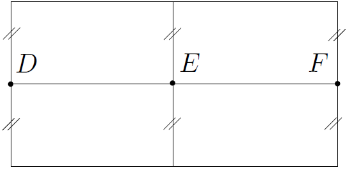
Idée de séquence 1 (collège, 6^{e}et 5^{e})

1. Faire tracer un carré (en utilisant des feuilles doubles ou en divisant la longueur par 2) et demander les longueurs des médianes et des diagonales.
2. Faire comparer avec les longueurs de pièces A et C. Si la figure est faite à l'échelle 1, faire poser les deux rails sur la figure réalisée.

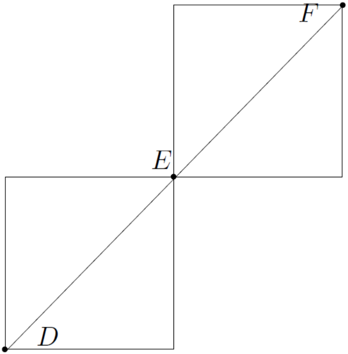
Idée de séquence 1 (collège, 6eet 5e)

1. Faire tracer un carré (en utilisant des feuilles doubles ou en divisant la longueur par 2) et demander les longueurs des médianes et des diagonales.
2. Faire comparer avec les longueurs de pièces A et C. Si la figure est faite à l'échelle 1, faire poser les deux rails sur la figure réalisée.
3.
    1. Faire constater (voir figure transparent suivant) que les deux médianes $[DE]$ et $[EF]$ des deux carrés voisins ayant un seul sommet en commun sont incluses dans une même droite. Faire réaliser la pose de deux rails de type A.
    2. Procéder de même avec les deux diagonales $[DE]$ et $[EF]$ et un rail de type C.

Idée de séquence 1 (collège, 6^{e}et 5^{e})

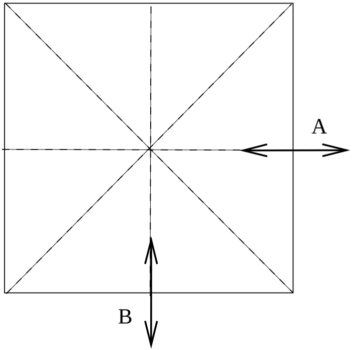


(a) par le coté



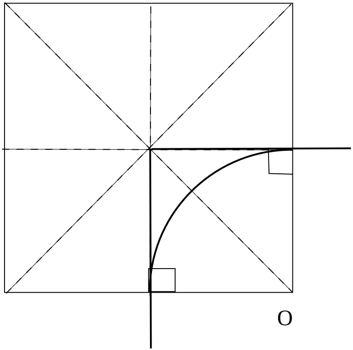
(b) par le sommet

Idée de séquence 1 (collège, 6^{e}et 5^e)



Trouver un cercle passant par A et B et tangent en ces points.

Idée de séquence 1 (collège, 6^{e}et 5^{e})



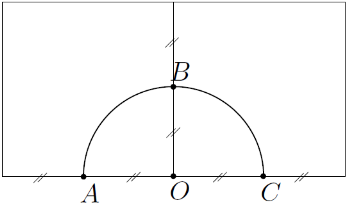
Un cercle de centre 0, de rayon $c/2$.

Question : est-ce qu'il existe d'autre solution (en forme de cercle) ?

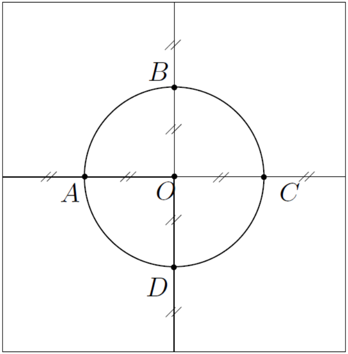
Idée de séquence 1 (collège, 6^{e}et 5^{e})

1. Faire tracer deux carrés voisins comme le montre la figure du transparent suivant et demander de tracer un cercle de centre O passant par le point A. Constater que les deux quarts de cercles obtenus passent bien, dans chacun des carrés, par les milieux de deux côtés successifs.
2. Faire tracer les symétriques des cercles obtenus par rapport aux médianes (voire aux diagonales) de chacun des carrés et constater qu'on obtient d'autres quarts de cercles qui passent encore par les milieux de deux côtés successifs d'un carré.
3. Faire tracer les bords des rails en leur expliquant que ce sont aussi des quarts de cercle.
4. On pourra aussi, si la figure est réalisée à l'échelle 1 ou faire la figure au tableau ou utiliser le grand poster et demander aux élèves de poser un rail de type B et de prendre son symétrique par rapport aux médianes (voire aux diagonales) de chacun des carrés et de faire constater (grâce aux tenons-mortaises) que l'on est obligé de retourner le rail.

Idée de séquence 1 (collège, 6^e et 5^e)



(a) Deux carrés voisins

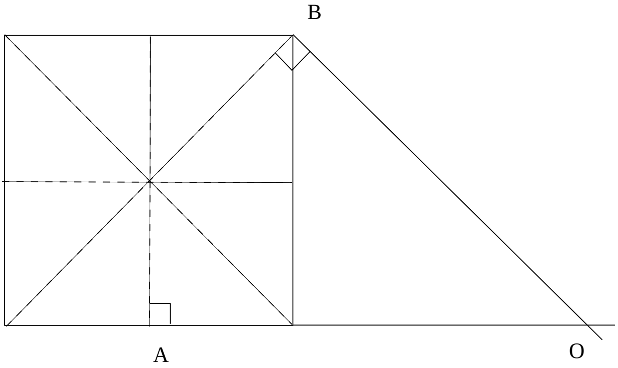


(b) Quatre carrés voisins

Idée de séquence 1 (collège, 6^{e}et 5^{e})

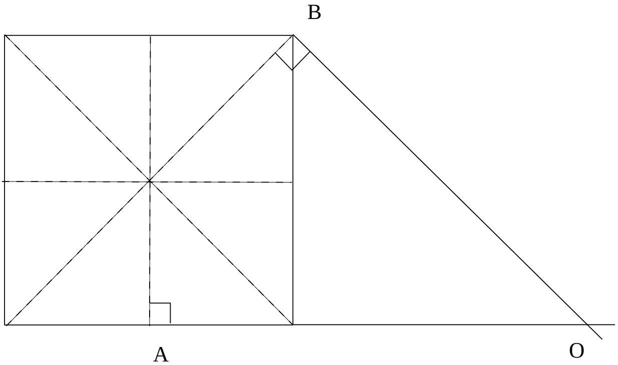
Faire tracer un cercle passant par deux sommets consécutifs du carrés et les faire travailler comme précédemment.

Idée de séquence 1 (collège, 6^{e}et 5^e)



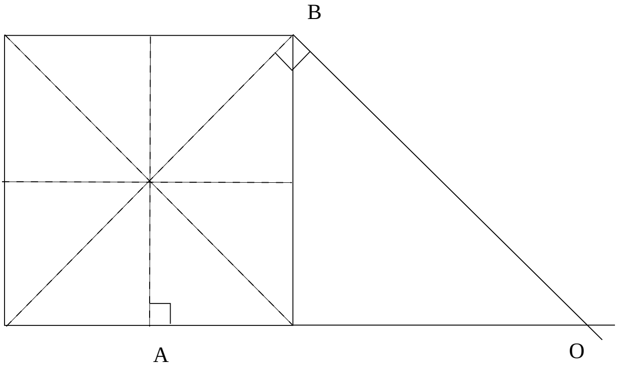
Est-il possible qu'il existe un cercle passant par A et B, tangent aux points A et B aux droites données,

Idée de séquence 1 (collège, 6eet 5e)



Si le cercle existe son centre ne peut qu'être qu'en O. Le rayon serait alors égal à $OA = OB$. Or $OA = c + c/2 = 3/2c$ et $0B = \sqrt{2}c$.

Idée de séquence 1 (collège, 6^{e}et 5^e)

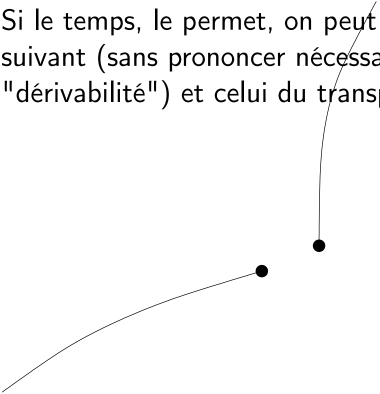


Or, on a $3/2 \neq \sqrt{2}$!

Idée de séquence 1 (collège, 6^{e}et 5^{e})

Pourquoi la continuité et la dérivabilité ?

Si le temps, le permet, on peut évoquer rapidement ce point suivant (sans prononcer nécessairement les mots "continuité" et "dérivabilité") et celui du transparent suivant !

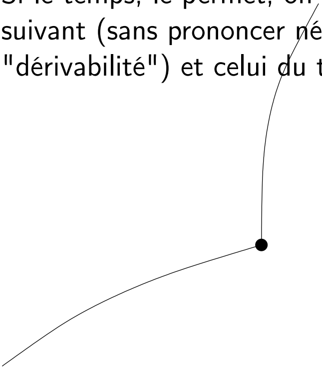


Pour éviter les « sauts »

Idée de séquence 1 (collège, 6^{e}et 5^{e})

Pourquoi la continuité et la dérivabilité ?

Si le temps, le permet, on peut évoquer rapidement ce point suivant (sans prononcer nécessairement les mots "continuité" et "dérivabilité") et celui du transparent suivant !

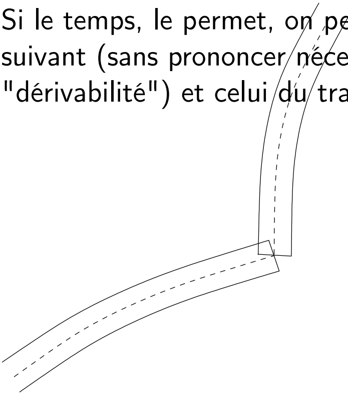


... et obtenir la situation ci-dessus ! Mais cela ne suffit pas à assurer un bon encastrement de deux rails contingus !

Idée de séquence 1 (collège, 6^{e}et 5^{e})

Pourquoi la continuité et la dérivabilité ?

Si le temps, le permet, on peut évoquer rapidement ce point suivant (sans prononcer nécessairement les mots "continuité" et "dérivabilité") et celui du transparent suivant !

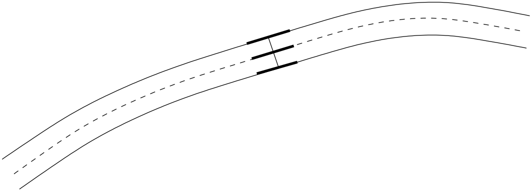


Ici, il y a continuité mais pas dérivabilité (les deux extrémités de rails sont bien placées mais pas les bords de rails) !

Idée de séquence 1 (collège, 6^{e}et 5^{e})

Pourquoi la continuité et la dérivabilité ?

Si le temps, le permet, on peut évoquer rapidement ce point suivant (sans prononcer nécessairement les mots "continuité" et "dérivabilité") et celui du transparent suivant !



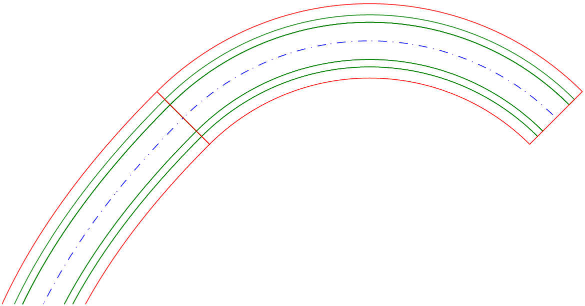
Enfin, ici, il y a continuité et dérivabilité (les bords des rails sont bien placés) ! !

Idée de séquence 1 (collège, 6^{e}et 5^e)

Pourquoi la continuité et la dérivabilité ?

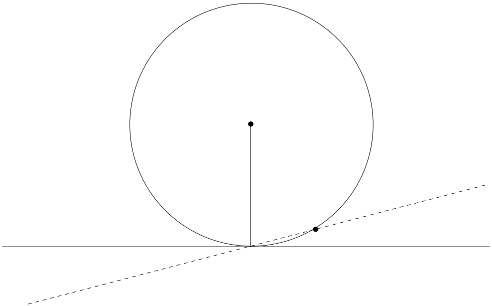
Si le temps, le permet, on peut évoquer rapidement ce point suivant (sans prononcer nécessairement les mots "continuité" et "dérivabilité") et celui du transparent suivant !

Raccord 5−4



Idée de séquence 1 (collège, 6^{e}et 5^e)

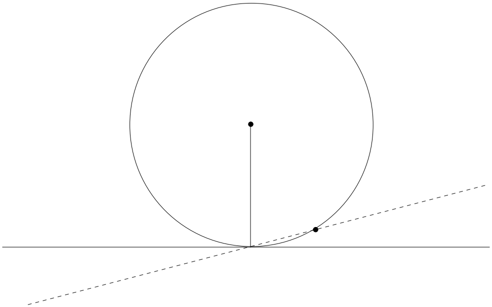
Rappel sur la tangente à un cercle



La seule droite qui ne coupe le cercle qu'en un seul point est la droite passant par ce point et perpendiculaire au rayon.

Idée de séquence 1 (collège, 6^e^et 5^e^)

Rappel sur la tangente à un cercle



La seule droite qui ne coupe le cercle qu'en un seul point est la droite passant par ce point et perpendiculaire au rayon.

La droite et le cercle « se touchent » en un seul point. Le mot tangent vient du latin « toucher » (Toccare en italien).

Autres idée de séquences

Voir document de travail.

Autres idée de séquences

Dans le supérieur

Dans le supérieur : travail sur le tracé de la parabole dont l'utilisation de l'interpolation d'Hermite en Analyse numérique.

Autres idée de séquences

Dans le supérieur

Page à détacher et à rendre (le cas échéant !)

Nom :
Prénom

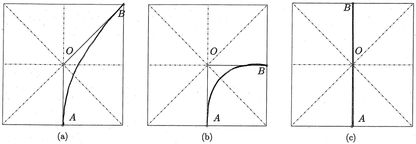


FIGURE 1. Les trois figures à compléter

oui TB

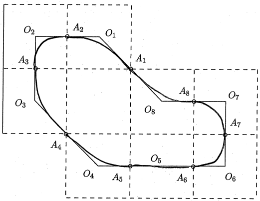


FIGURE 2. La figure à compléter

Construction des pièces 5 et 6 (Bézier)

- Inventée en 1959 (algorithme) par De Casteljau puis redécouverte dix ans plus tard par Bézier, deux ingénieurs en automobile (Citroën , Renault) pour dessiner les forme de voiture ;

Construction des pièces 5 et 6 (Bézier)

- Inventée en 1959 (algorithme) par De Casteljau puis redécouverte dix ans plus tard par Bézier, deux ingénieurs en automobile (Citroën , Renault) pour dessiner les forme de voiture ;
- Très utilisée en CAO et logiciels de dessin ;

Construction des pièces 5 et 6 (Bézier)

- Inventée en 1959 (algorithme) par De Casteljau puis redécouverte dix ans plus tard par Bézier, deux ingénieurs en automobile (Citroën , Renault) pour dessiner les forme de voiture ;
- Très utilisée en CAO et logiciels de dessin ;
- Repérée par un informaticien de chez Adobe, elles sont utilisées dans les fontes des caractères, donc vous en voyez tout le temps !

Construction des pièces 5 et 6 (Bézier)

- Inventée en 1959 (algorithme) par De Casteljau puis redécouverte dix ans plus tard par Bézier, deux ingénieurs en automobile (Citroën , Renault) pour dessiner les forme de voiture ;
- Très utilisée en CAO et logiciels de dessin ;
- Repérée par un informaticien de chez Adobe, elles sont utilisées dans les fontes des caractères, donc vous en voyez tout le temps !

Plus de détails sur
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_de_Bézier` ou
F. Holweck et J.-N. Martin. *Géométries pour l'ingénieur*. Paris : Ellipses, 2013.

Construction des pièces 5 et 6 (Bézier)

- Courbes de Bézier définie par $n+1$ points de contrôle du plan, P_0 à P_n. (Presque !) les mêmes que dans les logiciels de dessin.

Construction des pièces 5 et 6 (Bézier)

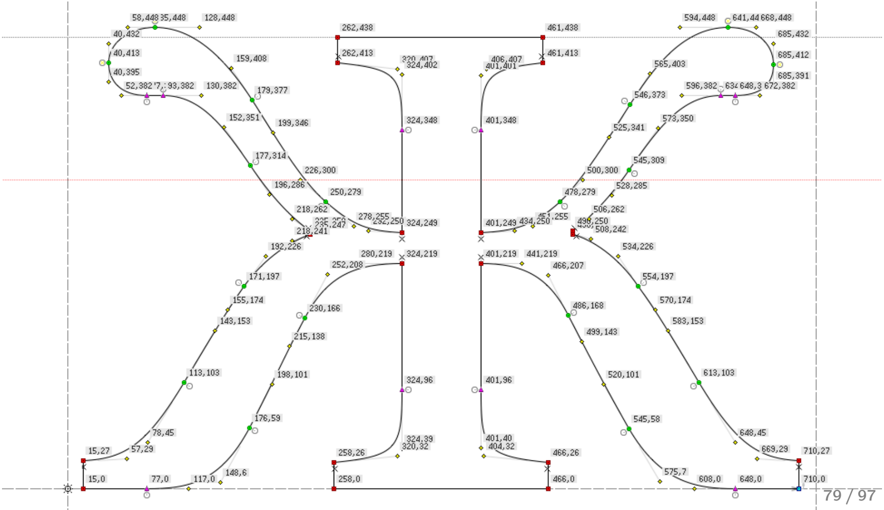
- Courbes de Bézier définie par $n+1$ points de contrôle du plan, P_0 à P_n. (Presque !) les mêmes que dans les logiciels de dessin.
- $\overrightarrow{P_0P_1}$ est tangent à la courbe en P_0 et $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ est tangent à la courbe en P_n.

Construction des pièces 5 et 6 (Bézier)

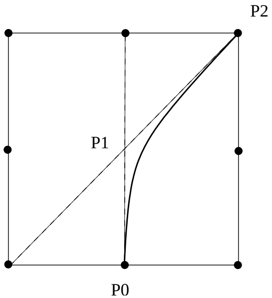
- Courbes de Bézier définie par $n+1$ points de contrôle du plan, P_0 à P_n. (Presque !) les mêmes que dans les logiciels de dessin.
- $\overrightarrow{P_0P_1}$ est tangent à la courbe en P_0 et $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ est tangent à la courbe en P_n.
- Elle est incluse dans l'enveloppe convexe des points P_i.

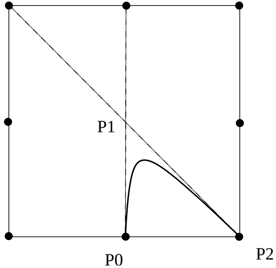
Exemple de Courbes de Bézier pour une lettre

Le « Ж » Cyrillique (Merci à Matthieu Cortat, `www.nonpareille.net`, Musée de l'imprimerie, Lyon)



Construction des pièces 5 et 6 (Bézier)





Courbe de Bézier d'ordre $n = 2$, définie par trois points de contrôle P_0, P_1 et P_2, passant par P_0 et P_2, dont les dérivées en ces points sont portées par $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Construction des pièces 5 et 6 (Parabole)

- En fait, les deux courbes obtenues ainsi sont identiques et égales à une parabole.

Construction des pièces 5 et 6 (Parabole)

- En fait, les deux courbes obtenues ainsi sont identiques et égales à une parabole.
- Il existe une unique parabole, définie par deux points et deux droites tangentes (aux points donnés).

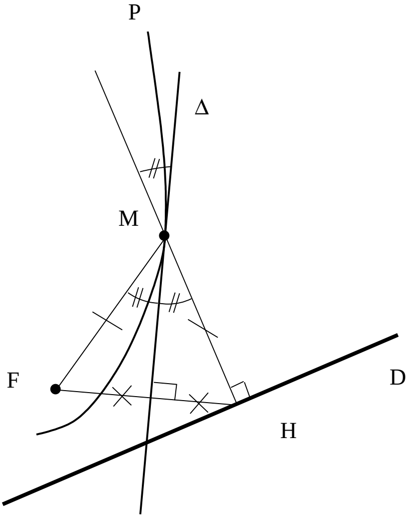
Construction des pièces 5 et 6 (Parabole)

- En fait, les deux courbes obtenues ainsi sont identiques et égales à une parabole.
- Il existe une unique parabole, définie par deux points et deux droites tangentes (aux points donnés).
- Voir C. Lebossé et C. Hémery. *Géométrie. Classe de Mathématiques (Programmes de 1945)*. Paris : Jacques Gabay, 1997.

passer la construction

Construction de la parabole

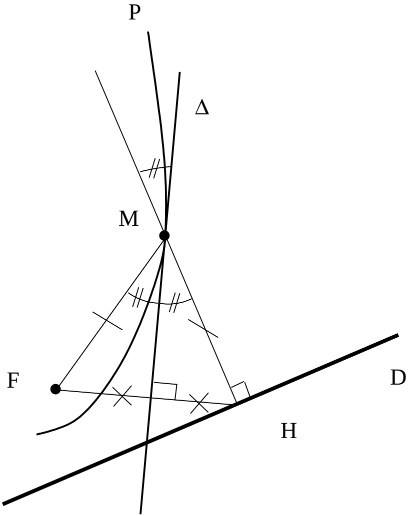
Rappels de la définition et tangente



- La parabole de foyer F et de directrice D est l'ensemble des points M tels que $MH = MF$.

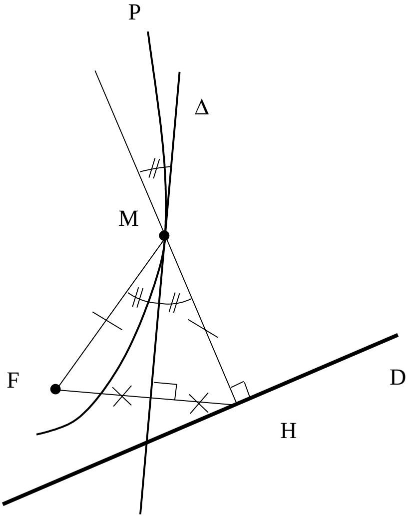
Construction de la parabole

Rappels de la définition et tangente



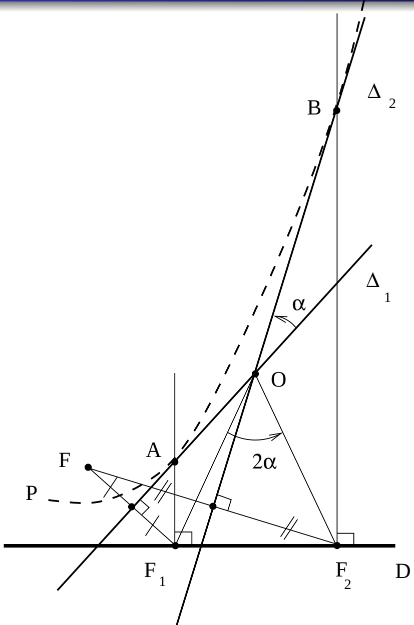
- La parabole de foyer F et de directrice D est l'ensemble des points M tels que $MH = MF$.
- Tout rayon perpendiculaire à la directrice passe par le foyer, après « réflexion ».

Construction de la parabole
Rappels de la définition et tangente



- La parabole de foyer F et de directrice D est l'ensemble des points M tels que $MH = MF$.
- Tout rayon perpendiculaire à la directrice passe par le foyer, après « réflexion ».
- La tangente Δ à la parabole en M est la médiatrice de $[FH]$.

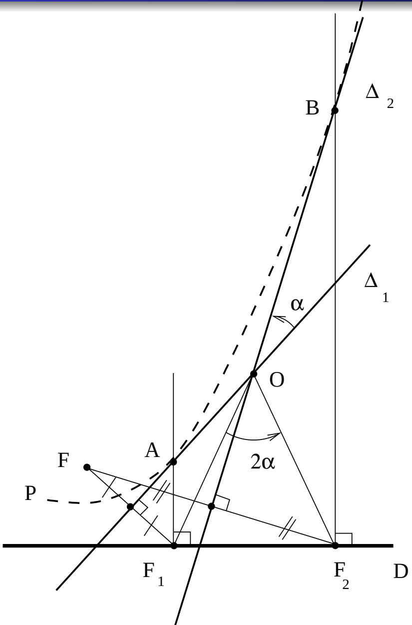
Construction de la parabole
Condition nécessaire



- Δ_1 et Δ_2 sécantes.

Construction de la parabole

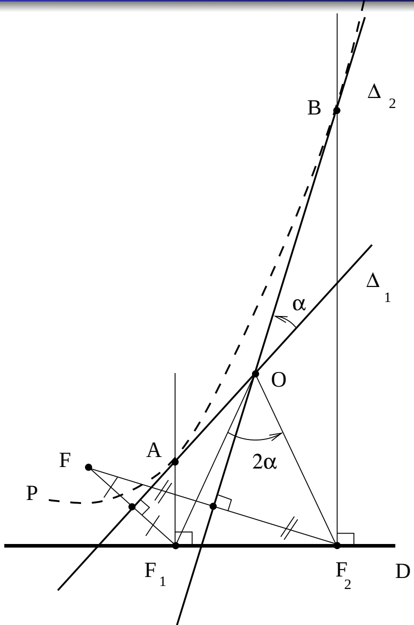
Condition nécessaire



- Δ_1 et Δ_2 sécantes.
- Δ_1 (resp. Δ_2) est la médiatrice de $[FF_1]$ (resp. $[FF_2]$).

Construction de la parabole

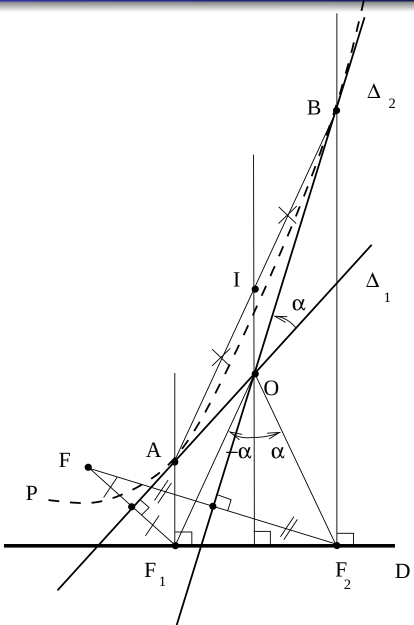
Condition nécessaire



- Δ_1 et Δ_2 sécantes.
- Δ_1 (resp. Δ_2) est la médiatrice de $[FF_1]$ (resp. $[FF_2]$).
- $\Longrightarrow$

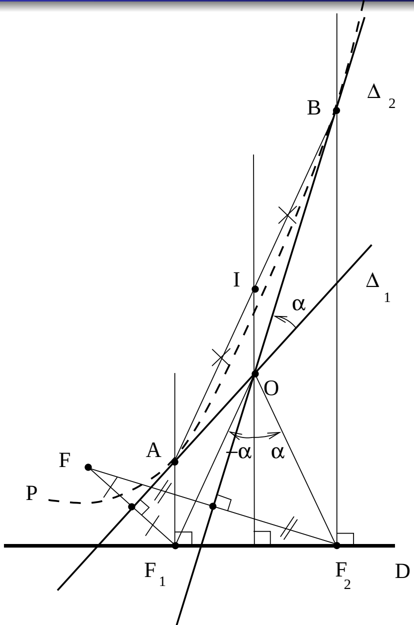
$$F_1 = s_{\Delta_1}(F),$$
$$F_2 = s_{\Delta_2}(F),$$
$$F_2 = s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}(F_1) = r_{(O,2\alpha)}(F_1).$$

Construction de la parabole
Condition nécessaire



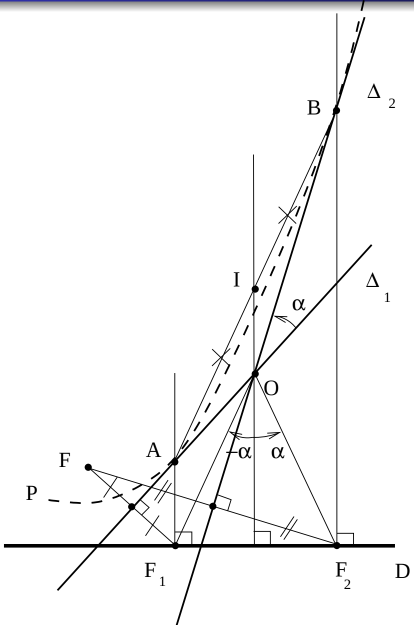
- Soit $I = \mathrm{m}([AB])$.

Construction de la parabole
Condition nécessaire



- Soit $I = \mathrm{m}([AB])$.
- (OI) parallèle à (AF_1).

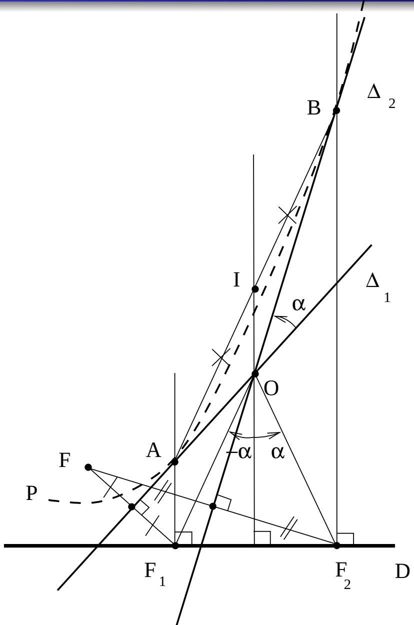
Construction de la parabole
Condition nécessaire



- Soit $I = \mathrm{m}([AB])$.
- (OI) parallèle à (AF_1).
- F_1 est l'unique intersection de la parallèle à (OI) passant par A et de $\Delta = r_{(O,-\alpha)}((OI))$.

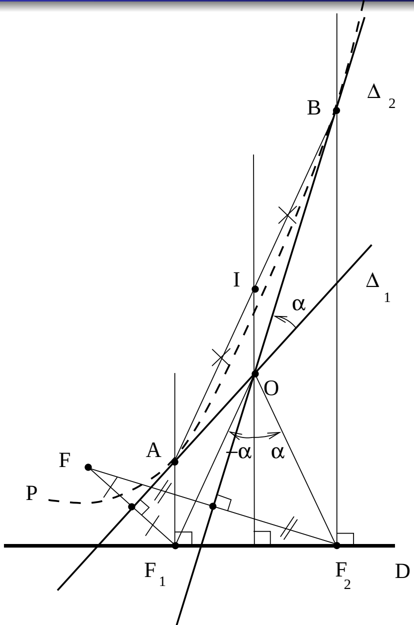
Construction de la parabole

Condition nécessaire



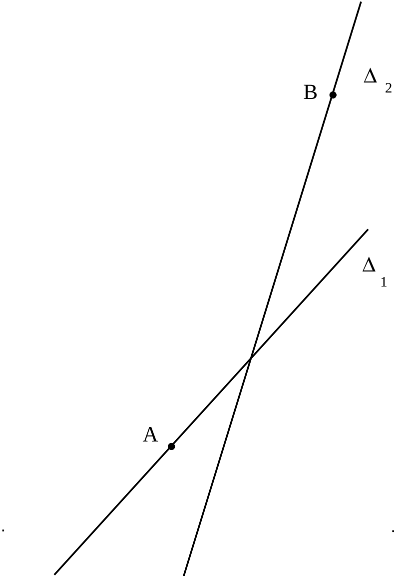
- Soit $I = \mathrm{m}([AB])$.
- (OI) parallèle à (AF_1).
- F_1 est l'unique intersection de la parallèle à (OI) passant par A et de $\Delta = r_{(O,-\alpha)}((OI))$.
- $F = s_{\Delta_1}(F_1)$, unique.

Construction de la parabole
Condition nécessaire



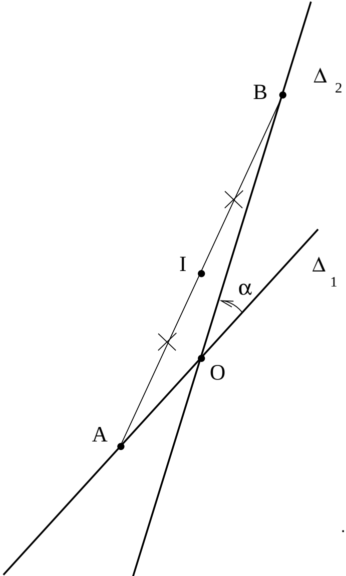
- Soit $I = \text{m}([AB])$.
- (OI) parallèle à (AF_1).
- F_1 est l'unique intersection de la parallèle à (OI) passant par A et de $\Delta = r_{(O,-\alpha)}((OI))$.
- $F = s_{\Delta_1}(F_1)$, unique.
- $D = (F_1F_2)$, unique.

Construction de la parabole
Condition suffisante



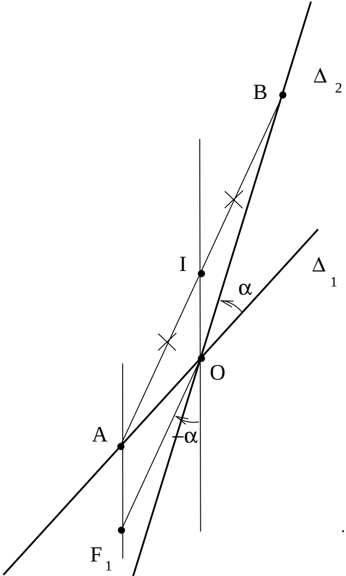
Soient A, B et Δ_1, Δ_2, sécantes.

Construction de la parabole
Condition suffisante



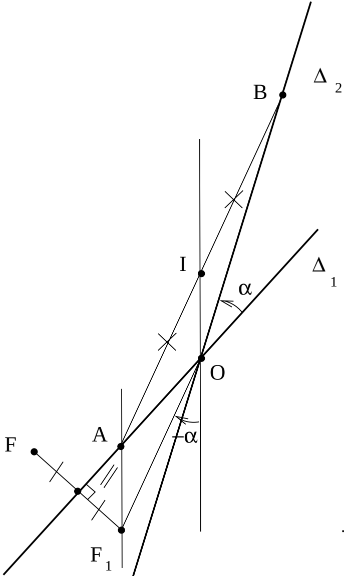
Soient $O = \Delta_1 \cap \Delta_2$,
$I = \mathrm{m}([AB])$ et $\alpha = \left(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}\right)$.

Construction de la parabole
Condition suffisante



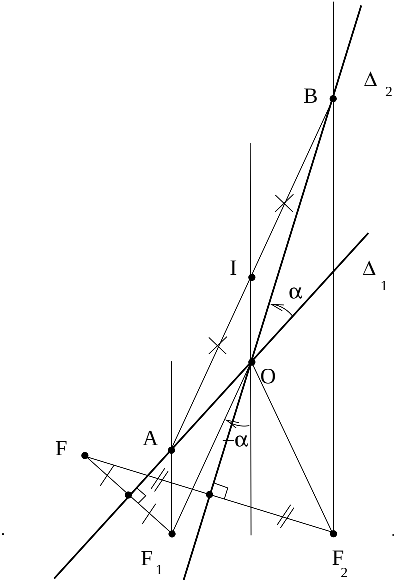
F_1 est l'unique intersection de la parallèle à (OI) passant par A et de $\Delta = r_{(O,-\alpha)}((OI))$.

Construction de la parabole
Condition suffisante



$$F = s_{\Delta_1}(F_1)$$

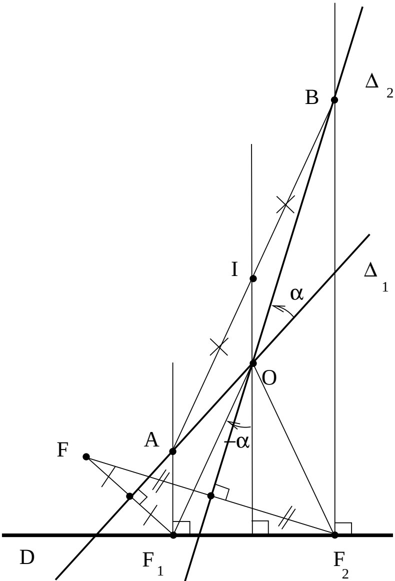
Construction de la parabole
Condition suffisante



$$F_2 = s_{\Delta_2}(F)$$

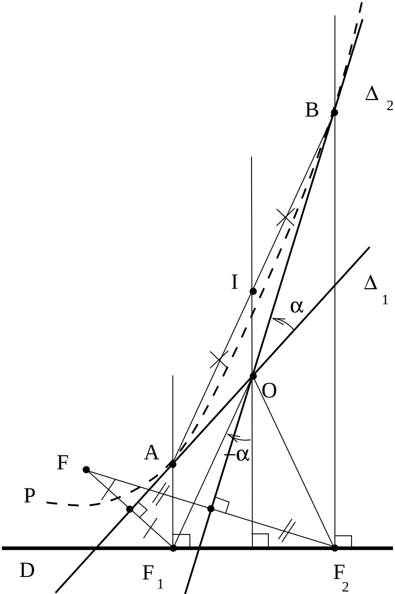
Construction de la parabole

Condition suffisante



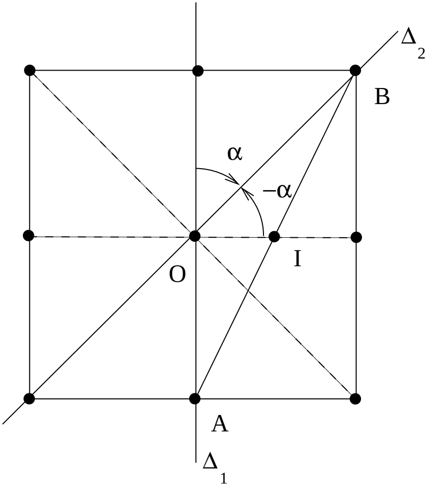
Soit $D = (F_1F_2)$. De plus $(AF_1) \perp D$ et $(BF_2) \perp D$

Construction de la parabole
Condition suffisante



P est la parabole de foyer F et de directrice D.

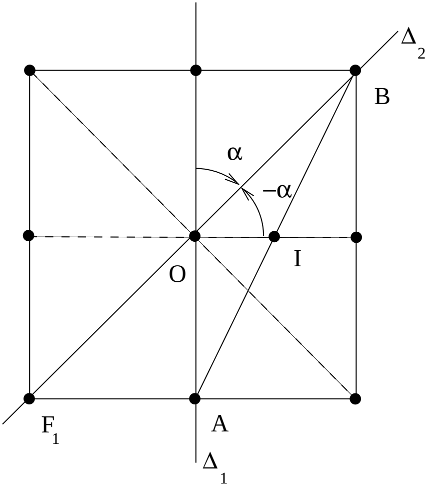
Construction de la parabole (pièce 5)



$$\alpha = -\frac{\pi}{4},$$

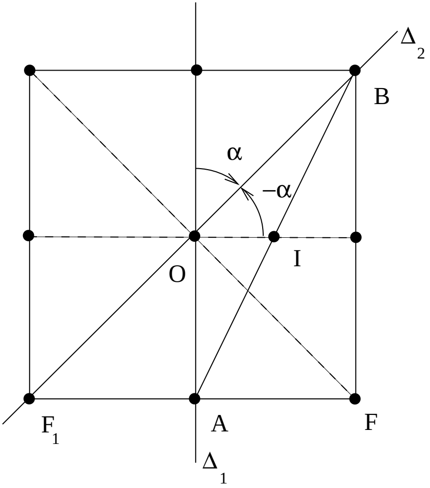
$$O = \Delta_1 \cap \Delta_2, \quad I = \mathrm{m}([AB])$$

Construction de la parabole (pièce 5)



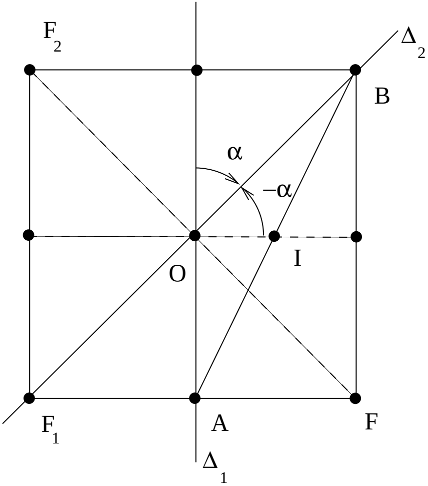
F_1 est l'unique intersection de la parallèle à (OI) passant par A et de $\Delta = r_{(O,\pi/4)}((OI))$.

Construction de la parabole (pièce 5)



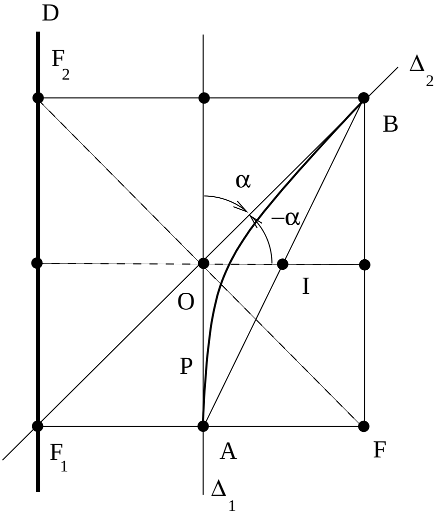
$$F = s_{\Delta_1}(F_1)$$

Construction de la parabole (pièce 5)



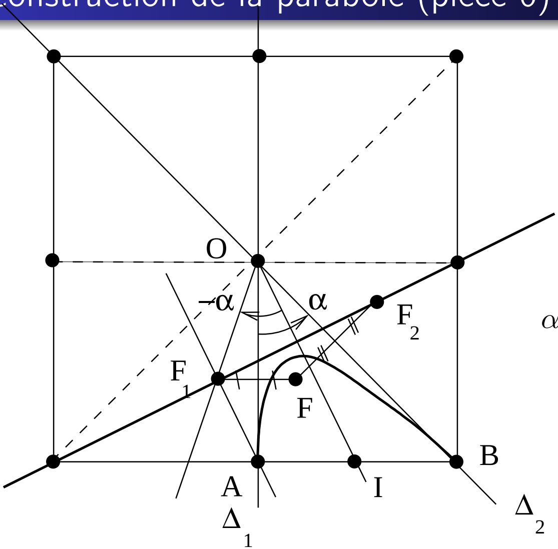
$$F_2 = s_{\Delta_2}(F)$$

Construction de la parabole (pièce 5)



P est la parabole de foyer F et de directrice $D = (F_1F_2)$.

Construction de la parabole (pièce 6)

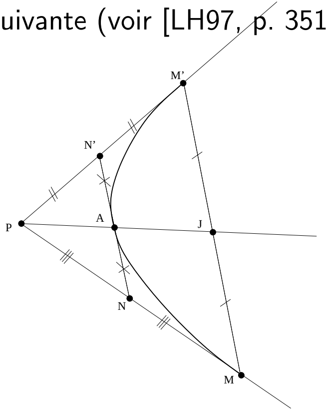


$\alpha = \frac{\pi}{4}$

revenir au début de la construction

Les Grecs et la CAO

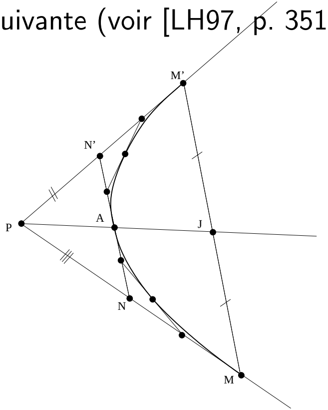
Une propriété bien connue des Grecs (par Archimède, selon [Per]) est la suivante (voir [LH97, p. 351])



Soient PM et PM' deux tangentes. $J = \mathrm{m}([MM'])$, $N = \mathrm{m}([PM])$, $N' = \mathrm{m}([PM'])$. Alors la droite (NN') est tangente à la parabole et son point de contact A est le mileu de $[PJ]$ et de $[NN']$.

Les Grecs et la CAO

Une propriété bien connue des Grecs (par Archimède, selon [Per]) est la suivante (voir [LH97, p. 351])



Procédé itératif !

Les Grecs et la CAO

Définition récurrente de la courbe de Bézier d'ordre 2 (De Castlejau)

- Issu de http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bezier_quadratic_anim.gif, voir Bezier_quadratic_anim.gif

Les Grecs et la CAO

Définition récurrente de la courbe de Bézier d'ordre 2 (De Castlejau)

- Issu de `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bezier_quadratic_anim.gif`, voir `Bezier_quadratic_anim.gif`
- Définition récurente (De Casteljau) :

$$P_1^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1,$$
$$P_2^1(t) = (1-t)P_1 + tP_2,$$

et

$$P_2^2(t) = (1-t)P_1^1 + tP_2^1.$$

Les Grecs et la CAO

Définition récurrente de la courbe de Bézier d'ordre 2 (De Castlejau)

- Issu de `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bezier_quadratic_anim.gif`, voir `Bezier_quadratic_anim.gif`
- Définition récurente (De Casteljau) :

$$
\begin{aligned}
P_1^1(t) &= (1-t)P_0 + tP_1,\\
P_2^1(t) &= (1-t)P_1 + tP_2,
\end{aligned}
$$

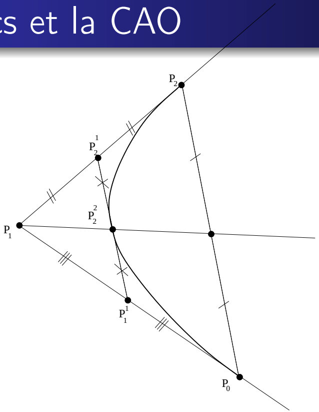
et

$$
P_2^2(t) = (1-t)P_1^1 + tP_2^1.
$$

- Définition avec polynôme de Bernstein (Bézier) :

$$
\forall t \in [0,1], \quad P(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2.
$$

Les Grecs et la CAO



En particulier, pour $t = 1/2$,

$$P_1^1 \text{ est le milieu de } [P_0P_1],,$$
$$P_2^1 \text{ est le milieu de } [P_1P_2],,$$
$$P_2^2 \text{ est le milieu de } [P_1^1P_2^1],,$$

et c'est la même propriété de la parabole !

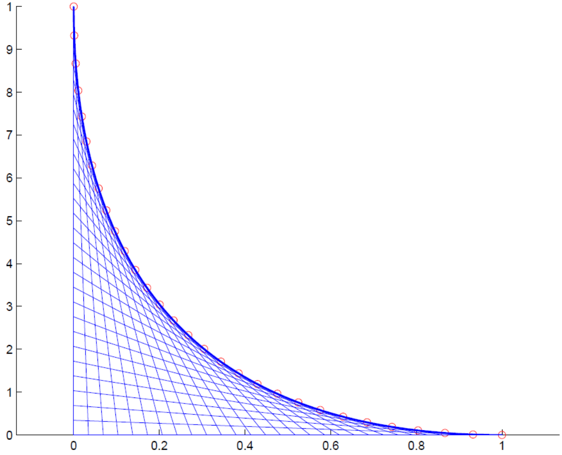
Les Grecs et la CAO

Preuve complète de façon analytique, ou mieux, par densité !

Les Grecs et la CAO

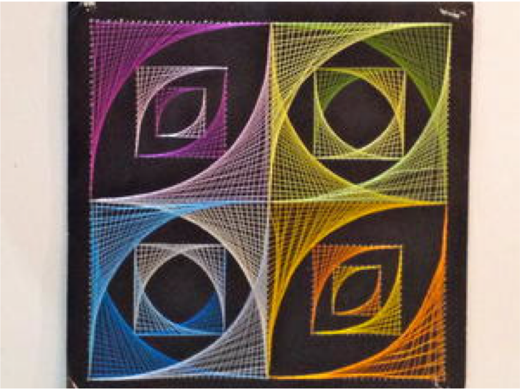
Preuve complète de façon analytique, ou mieux, par densité !
Autrement dit, les Bézier de degré 2 sont les paraboles.

Construction d'une parabole par la méthode de De Casteljau

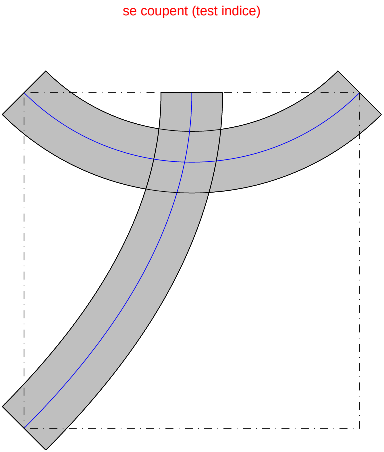


Construction d'une parabole par la méthode de De Casteljau

Parabole à fils

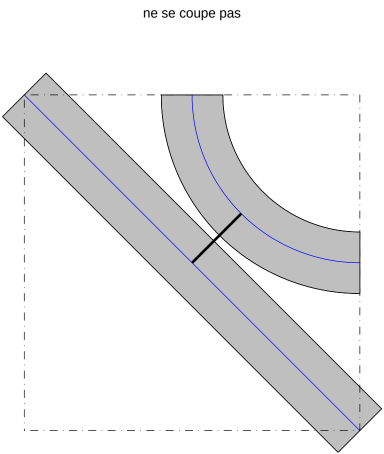


Plusieurs pièces dans un seul même carré



Deux pièces peuvent coexister dans un seul même carrés, en évitant la situation de la figure ci-dessus ...

Plusieurs pièces dans un seul même carré



... pour être disjointes comme ici.

Distance entre deux courbes

- Notion de distance entre deux courbes : on cherche à minimiser M_1M_2, M_1 et M_2 décrivant chacun une courbe.
- Chacune d'elle est soit une droite, soit un cercle, soit une parabole.

Distance entre deux courbes

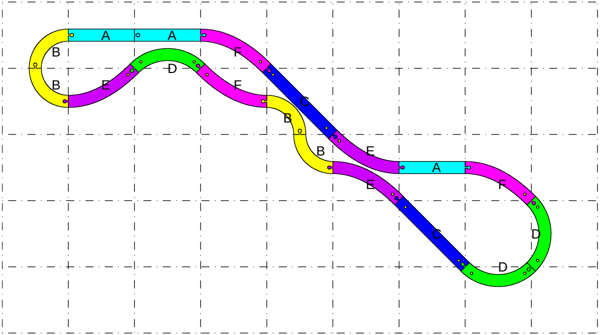
- Notion de distance entre deux courbes : on cherche à minimiser M_1M_2, M_1 et M_2 décrivant chacun une courbe.
- Chacune d'elle est soit une droite, soit un cercle, soit une parabole.
- Les cas où seuls les droites et les cercles interviennent peuvent être présentés au collège.
- La prise en compte des paraboles n'est plus possible de façon purement géométrique et fait apparaître des équations polynomiales.

Distance entre deux courbes

- Notion de distance entre deux courbes : on cherche à minimiser M_1M_2, M_1 et M_2 décrivant chacun une courbe.
- Chacune d'elle est soit une droite, soit un cercle, soit une parabole.
- Les cas où seuls les droites et les cercles interviennent peuvent être présentés au collège.
- La prise en compte des paraboles n'est plus possible de façon purement géométrique et fait apparaître des équations polynomiales.
- Cela peut être introduit au lycée voire à l'université : notions de minimum de fonction, systèmes non linéaires à résoudre numériquement.

Un exemple de circuit avec deux pièces dans un même carré

A: 3, B: 4, C: 2, D: 3, F: 3, E: 3



Question !

Est-ce possible d'avoir un circuit avec plus de trois pièces dans un seul même carré ?

J. Bastien. "Circuit apte à guider un véhicule miniature". FR2990627. Université Lyon I. Brevet publié sur le site de l'INPI http://data.inpi.fr, numéro FR2990627 https://data.inpi.fr/brevets/FR2990627?q=FR1254413#FR2990627. 15 mai 2012.

J. Bastien. *Catalogue de plans pour le système Easyloop® (tous les circuits à 11 rails au plus)*. Disponible sur : http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/catalogue_exhaustif_11rails.pdf. 2015. 566 pages.

J. Bastien. "Construction and enumeration of circuits capable of guiding a miniature vehicle". In : *Recreat. Math. Mag.* 3.6 (2016), pages 5–42. doi : 10.1515/rmm-2016-0006.

J. Bastien. *Construction et énumération de circuits aptes à guider un véhicule miniature*. Traduction en français de [Bas16], disponible sur http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/articles_provisoires/enumeration_circuit_JB_2016_fr.pdf. 2017.

J. Bastien. *Existence et unicité d'une courbe à courbure positive maximisant le minimum du rayon de courbure*. 2021. arXiv : 2104.01143.

F. Holweck et J.-N. Martin. *Géométries pour l'ingénieur*. Paris : Ellipses, 2013.

C. Lebossé et C. Hémery. *Géométrie. Classe de Mathématiques (Programmes de 1945)*. Paris : Jacques Gabay, 1997.

D. Perrin. "Les courbes de Bézier". Notes pour la préparation au CAPES de mathématiques disponibles sur `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/BezierDP.pdf`.