

DESCRIPTION DE LA PIÈCE 6 OPTIMALE

JÉRÔME BASTIEN

1. Introduction

On renvoie à la lecture de [Bas12 ; Bas16c ; Bas17 ; Bas16b] comme introduction complète.

Les courbes médianes définissant la géométrie des rails sont absolument identiques à celles proposées dans [Bas12 ; Bas16c ; Bas17 ; Bas16b] et sont rappelées sur la figure 1. On rappelle que ces six courbes sont deux segments de droites, deux arcs de cercles et deux portions de paraboles.

Dans [Bas12 ; Bas16b ; Bas16c] les rails *Easyloop* ®, aptes à faire rouler un petit train ont été décrits. Lors de la fabrication des pièces, seules les cinq premiers types de pièces, décrits sur la figure 1 ont été utilisés. La dernière forme, donnée en figure 1(f) n'a pas été retenue, puisque trop incurvée, c'est-à-dire, que le minimum du rayon de courbure est trop petit. Nous proposons une pièce correspondant à la forme 6 qui soit optimale, au sens où le minimum du rayon de courbure est choisi le plus grand possible. Nous verrons les deux avantages qu'offre ce choix par rapport au choix initial : la largeur du rail pourra être augmentée et l'encombrement des pièces réduit.

Date: 21 avril 2021.

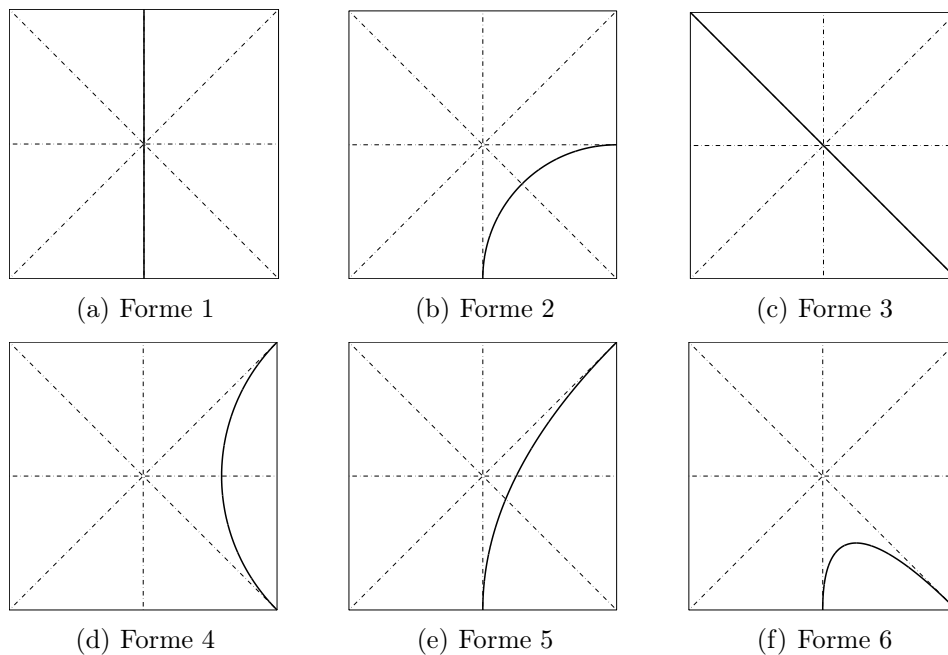


FIGURE 1. Les six formes de base.

2. Présentation du choix initial

2.1. Contrainte de rayon de courbure

Initialement, la pièce 6 a été définie par une parabole, ou de façon équivalente par une courbe de Bézier. Plus de détails dans [Bas12; Bas16c; Bas15a; Bas15b].

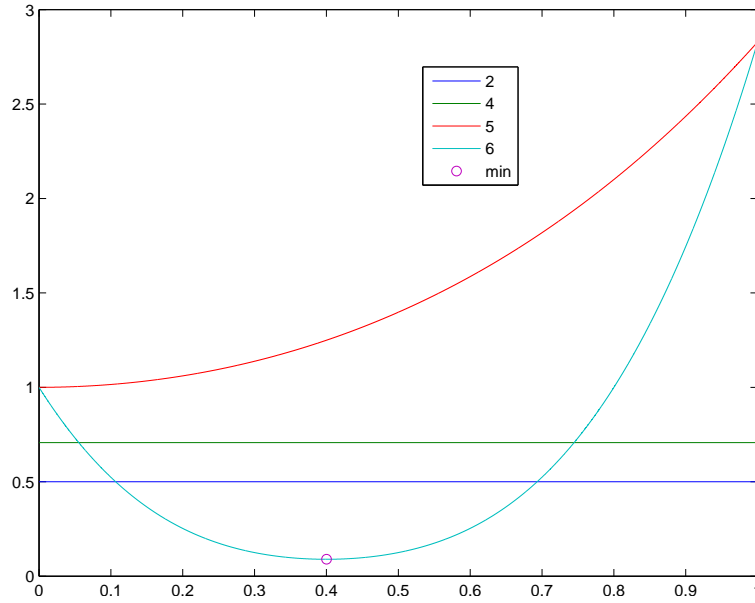


FIGURE 2. Les rayons de courbures des pièces (courbes).

Voir la figure 2, sur laquelle on a aussi indiqué l'ordonnée du minimum des tous les minimas des rayons de courbures.

Pour la première parabole, on trouve (en passant par les courbes de Bézier par exemple) la paramétrisation suivante :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \begin{aligned} x(t) &= 1/2 t^2, \\ y(t) &= -1/2 + t, \end{aligned}$$

et le rayon de courbure égal à

$$R(t) = -(t^2 + 1)^{3/2},$$

dont la valeur minimale vaut 1.

De même, pour la seconde parabole, on trouve

$$\forall t \in [0, 1], \quad \begin{aligned} x(t) &= 1/2 t^2, \\ y(t) &= -1/2 + t - t^2, \end{aligned}$$

et le rayon de courbure égal à

$$R(t) = -(5t^2 + 1 - 4t)^{3/2},$$

dont la valeur minimale vaut

$$R_{\min} = 1/25 \sqrt{5} \approx 0.089443. \quad (1)$$

Dans [Bas12; Bas16c], on a écrit que la demi largeur du rail ne devait dépasser le rayon de courbure. Voir aussi l'introduction de [Bas21b] et l'annexe A page 12. On note e la largeur du rail. D'après ce qui précède, il est donc nécessaire que largeur e du rail vérifie

$$\frac{e}{L} < \delta_{\min}, \quad (2)$$

où δ_{\min} est donné par

$$\delta_{\min} = 2 \times (1/25 \sqrt{5}) \approx 0.178885, \quad (3)$$

où L est le coté du carré.

Ce rayon de courbure minimal est trop petit.

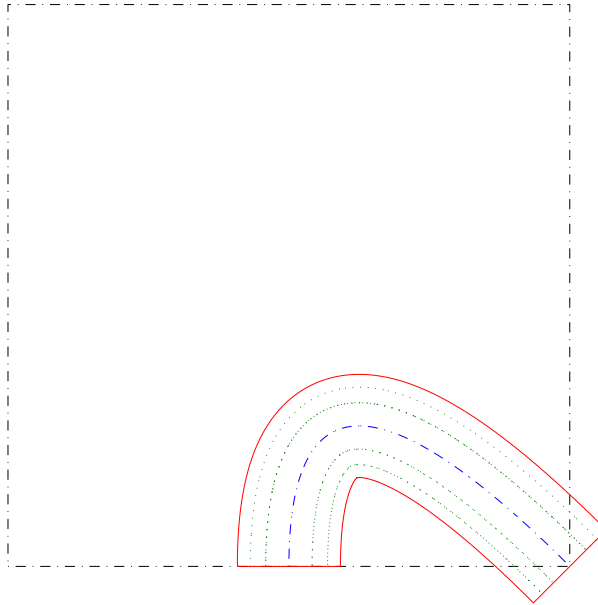


FIGURE 3. La pièce 6 trop incurvée.

Si on choisit par exemple les cotations Brio, utilisées pour les rails Easyloop, on obtient la pièce représentée sur la figure 3, qui présente un point singulier.

Une autre raison qui nous incite à ne pas avoir un rayon de courbure trop petit est que l'angle de braquage des roues du véhicule est lié à la longueur du véhicule et le rayon de courbure. Voir l'introduction de [Bas21b] et l'annexe A page 12.

En modélisme, il existe d'ailleurs des normes très précises sur les rayons de courbures à utiliser en fonction de l'écartement des rails, comme le montre les url <http://www.morop.org/index.php/fr/nem-normes.html> et en particulier http://www.morop.org/downloads/nem/fr/nem111_f.pdf.

2.2. Contrainte géométrique

Il existe aussi une autre contrainte qui limite la largeur du rails. On a montré, dans [Bas16c] et l'annexe B que, pour que plusieurs pièces puissent cohabiter dans le même carré, et par là même

3. Présentation de la solution optimale

Dans [Bas12; Bas16c], on a montré que la pièce 6 possède deux extrémités et deux tangentes données et que toute courbe de ce type est protégée. On souhaite construire maintenant une courbe qui permette d'obtenir un rayon de courbure plus grand que le précédent, tout en vérifiant les contraintes géométriques déjà vues.

On cherche donc à déterminer une courbe, définie par deux extrémités et deux tangentes données, dont le minimum du rayon de courbure soit maximal. On rajoute la contrainte que la courbe tourne toujours dans le même sens (c'est-à-dire avoir une courbure de signe constante) et que l'angle de la tangente à la courbe soit compris entre les deux valeurs données par les tangentes des extrémités. On renvoie à [Bas19; Bas21b] pour l'obtention de la courbe optimale décrite ci-dessous. La pièce obtenue est décrite par la suite (définie dans un carré unité), grâce à la définition de la courbe médiane.

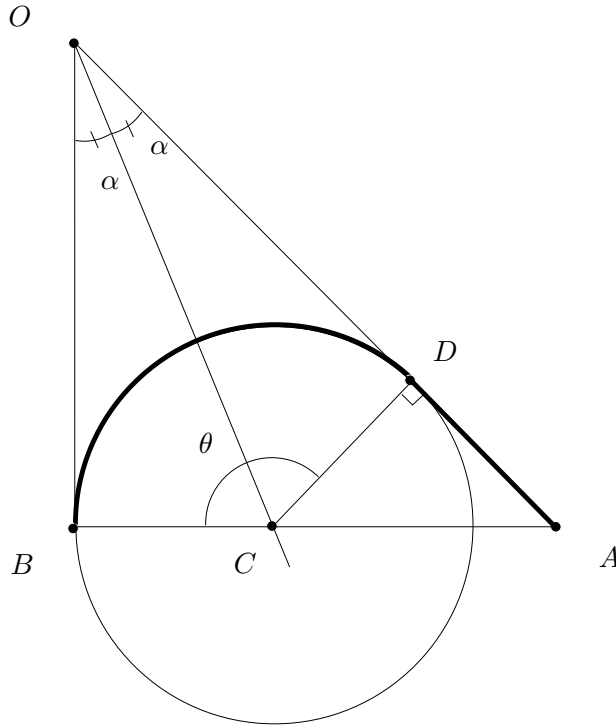


FIGURE 5. La description géométrique de la courbe formée d'un arc de cercle et d'un segment de droite.

Comme indiqué sur la figure 5, la courbe constituée par la réunion d'un arc de cercle et d'un segment de droite est définie de la façon suivante (le triangle OAB étant isocèle rectangle en B avec $OB = BA = 1/2$) :

- (OC) est la bissectrice de l'angle \widehat{O} avec $\alpha = \pi/8$;
- $BC = (\sqrt{2} - 1)/2$;
- $\theta = 3\pi/4$;
- L'arc de cercle a pour centre C et pour rayon R donné par

$$R = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \approx 0.20710678, \quad (8)$$

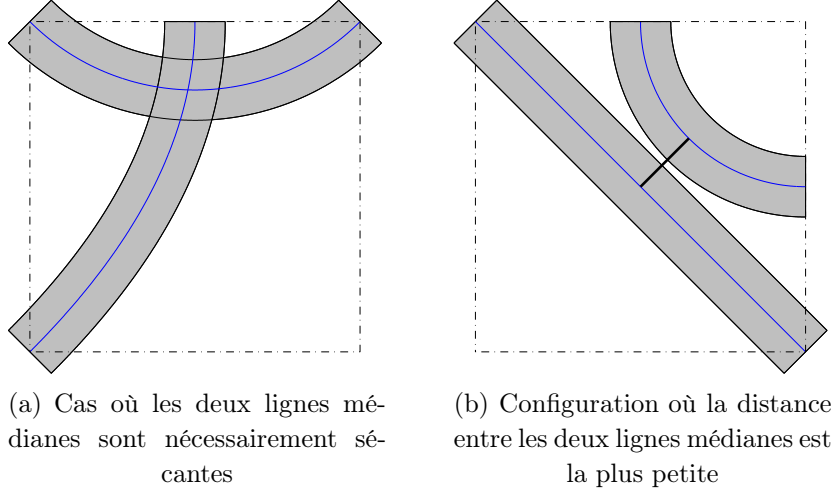


FIGURE 6. Deux pièces dans un seul même carré.

et est limité par les points B et D ;

— Le segment de droite est le segment $[DA]$ avec $DA = (\sqrt{2} - 1)/2$.

Il est donc nécessaire que largeur e du rail vérifie cette fois-ci

$$\frac{e}{L} < \delta_{\min}, \quad (9)$$

où δ_{\min} est donné par

$$\delta_{\min} = 2 \times \left((\sqrt{2} - 1)/2 \right) \approx 0.414214, \quad (10)$$

à la place de (2)-(3). On a donc plus que doublé la valeur minimale du rayon de courbure !

Reprenons maintenant les résultats de la section 2.2.

Comme précédemment, on a fait un balayage sur les 3136 cas possibles avec la nouvelles forme de la pièce 6. Dans le cas où la forme de la pièce 6 est parabolique, on obtient la configuration de la figure 7(a). Voir détails en annexe B.4. Si on considère la pièce 6 optimale, on obtient cette fois la configuration de la figure 7(b), où la distance minimale est de nouveau définie par (5). La configuration précédente entre deux parabole et cette fois-ci remplacée par la configuration parabole-pièce 6 entre lesquelles la distance est plus grande. Voir détails en annexe B.5.

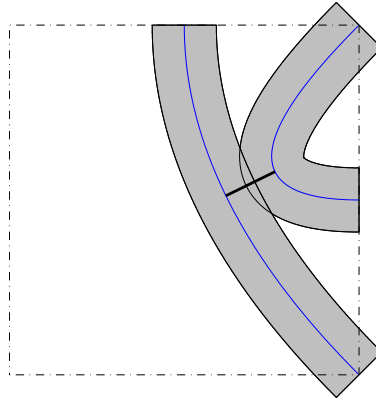
Finalement, la largeur e devra vérifier (9)-(10) et (4)-(5).

Si on choisit les dimensions de la section standard Brio, choisis pour les rails Easyloop, on obtient donc finalement la pièce 6 représentée sur la figure 8.

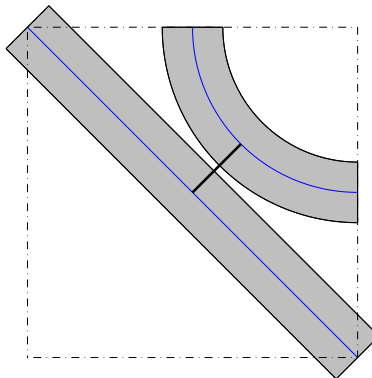
On pourra consulter les exemples des figures 9, 10 et 11. ainsi que la section 4.

4. Énumération et catalogue de circuits

Voir [Bas21a].



(a) Configuration où la distance entre les deux lignes médianes est la plus petite (cas Bézier)



(b) Configuration où la distance entre les deux lignes médianes est la plus petite (cas optimal)

FIGURE 7. Deux pièces dans un seul même carré.

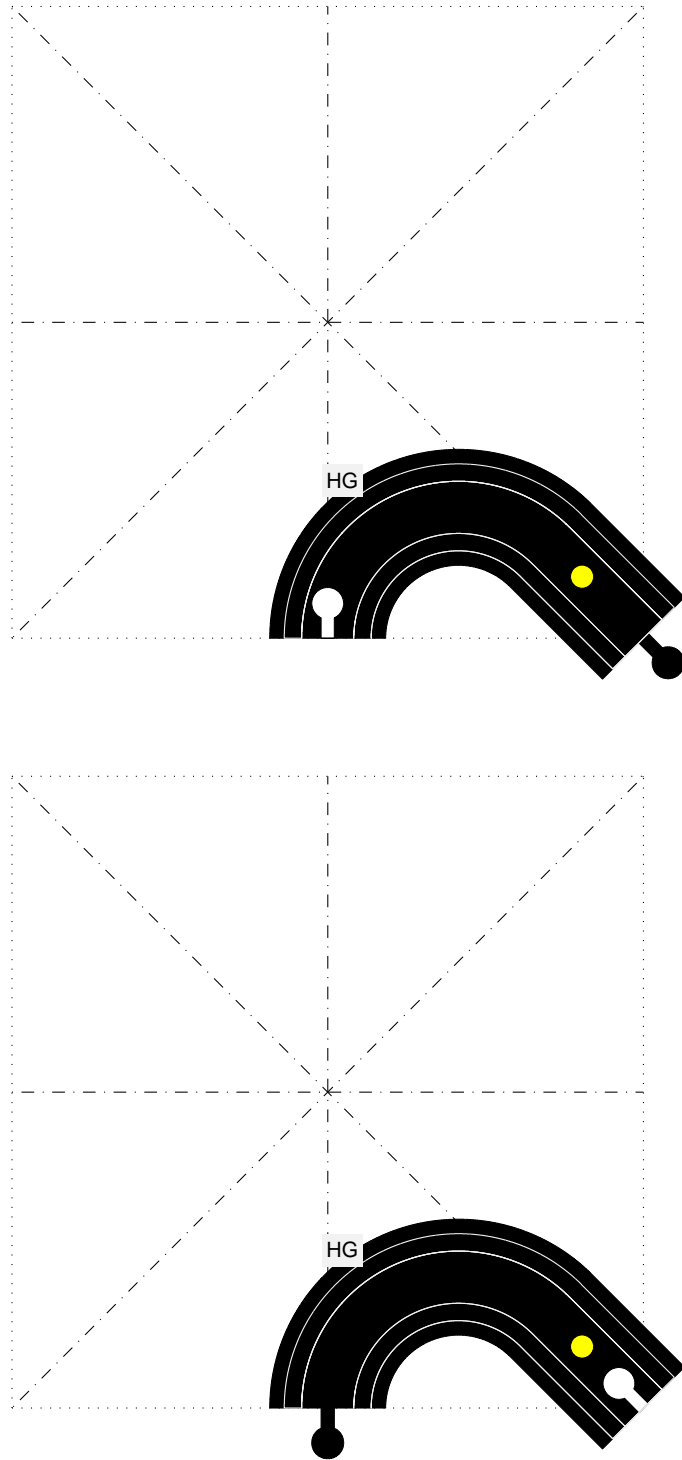


FIGURE 8. La forme optimale.

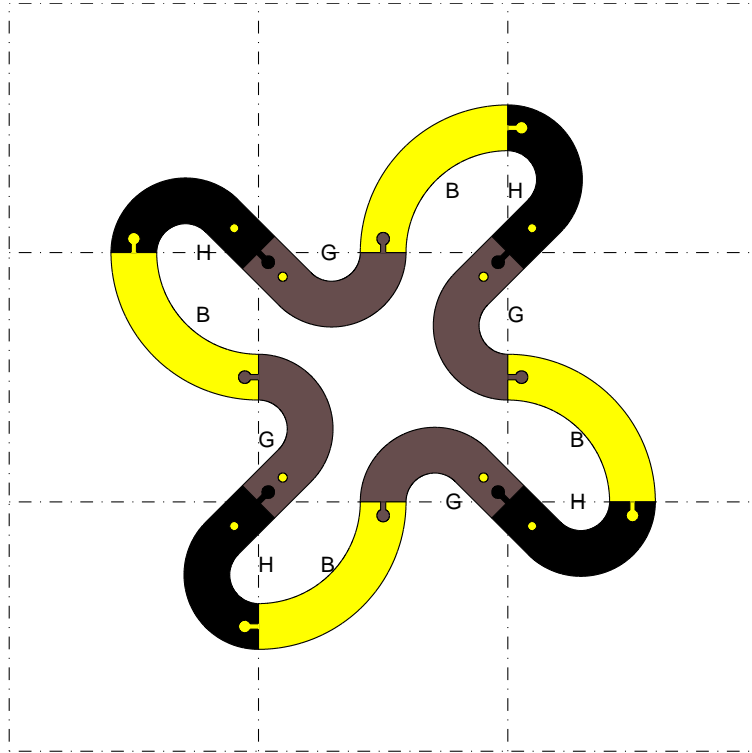


FIGURE 11. Un exemple de circuit avec quatre pièces dans un même carré avec la pièce 6 optimale.

Annexe A. Pourquoi le rayon de courbure limite-t-il la largeur du rail ?

Dans [Bas12; Bas16c], on a écrit que la demi largeur du rail ne devait dépasser le rayon de courbure. En effet, on construit, pour les passages des roues et des bord, des courbes à écartement constant, comme le montre la figure 12.

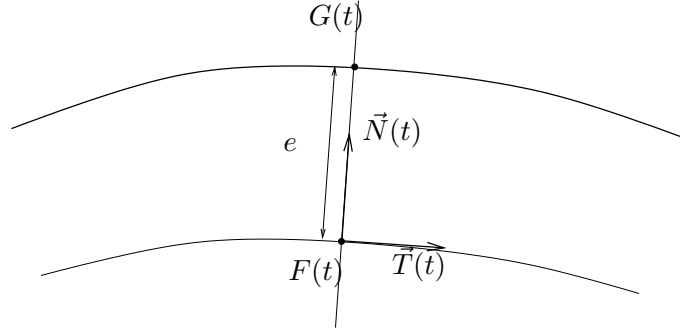


FIGURE 12. Les deux courbes d'écartement constant.

On se donne une courbe paramétrée $t \mapsto F(t) \in \mathbb{R}^2$ et un réel e . On cherche une courbe notée G telle qu'en tout point, la distance entre les deux courbes soit égale à e , ceci pour permettre de définir des conduites de roues dont l'écartement soit imposé. Voir figure 12. On note $(\text{vec}T(t), \vec{N}(t))$ le repère de Frenet. On pourra consulter par exemple [Bas11].

Le point G est alors défini comme le point de la droite perpendiculaire à la courbe F au point $F(t)$, à la distance e de $F(t)$. On a donc

$$\forall t, \quad G(t) = F(t) + e\vec{N}(t), \quad (11)$$

ce qui définit donc G en fonction de F . Cette équation reste valable si l'on choisit e négatif, en dans ce cas on décrit les deux courbes à la distance e de la courbe F . On peut montrer que

$$\forall t, \quad G'(t) = \|F'(t)\| \left(1 - \frac{e}{R(t)}\right) \vec{T}, \quad (12)$$

où $R(t) \neq 0$ est le rayon de courbure de la courbe définie par F . Supposons $F'(t)$ et $R(t)$ non nuls.

Si $R(t) > 0$, alors, pour $e < 0$, $1 - e/R(t) > 0$. Si $e > 0$, alors $1 - e/R(t) > 0$ est équivalent à $e < R(t)$. Si $R(t) < 0$, alors, pour $e > 0$, $1 - e/R(t) > 0$. Si $e < 0$, alors $1 - e/R(t) > 0$ est équivalent à $e > R(t)$. Bref, si la distance positive e est telle que

$$F'(t) \text{ et } G'(t) \text{ sont non nuls,} \quad (13a)$$

et si

$$\forall t, \quad |R(t)| > e, \quad (13b)$$

alors $G'(t)$ est colinéaire et de même sens à \vec{T} et donc les deux tangentes aux deux courbes en $F(t)$ et $G(t)$ sont parallèles

Si l'on dépasse cette valeur, les bords ou les passages risqueront de présenter un point de rebroussement ou un point multiple, ce qui rendra la création des rails impossible, comme le montre la figure 13.

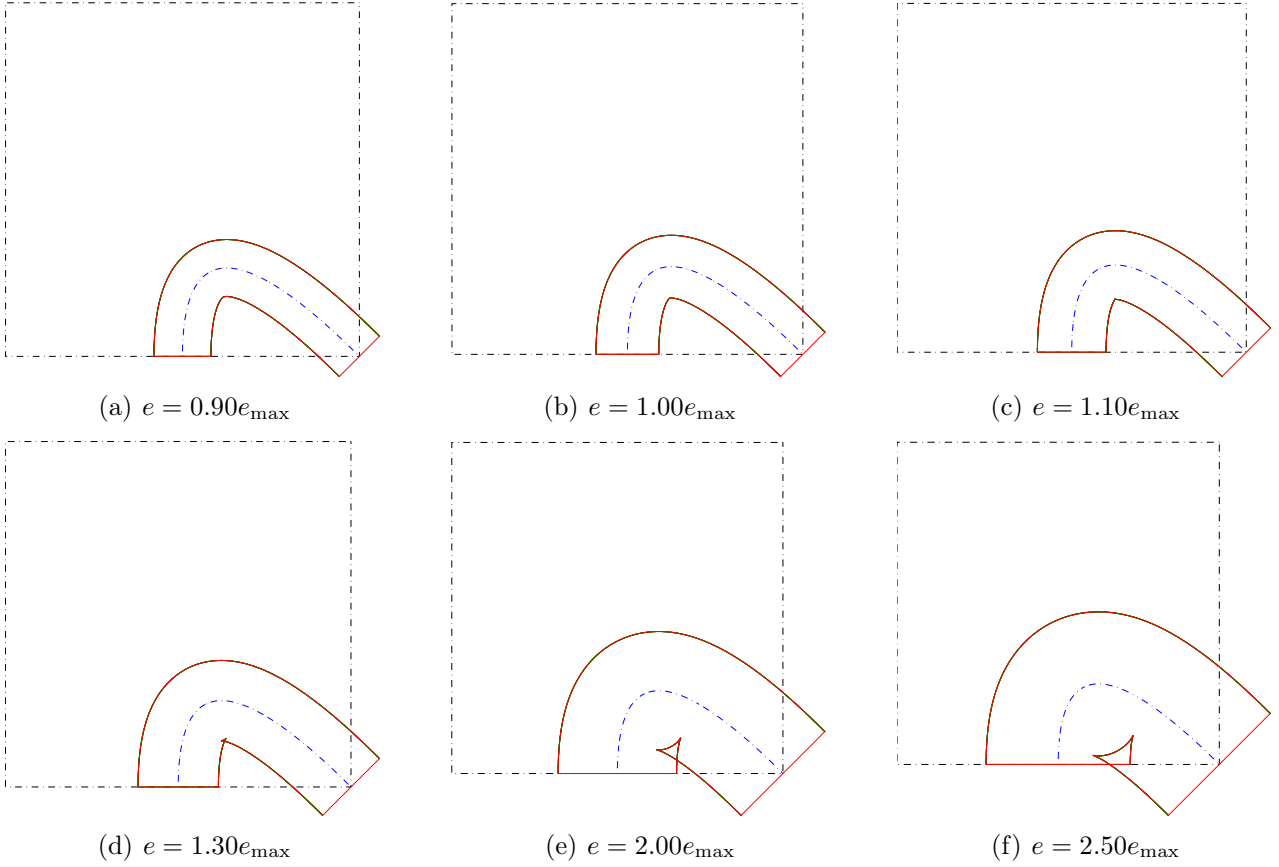


FIGURE 13. Forme de la pièce contenant la petite parabole avec dépassement de largeur autorisée.

Annexe B. Détermination des valeurs données dans (5) et (7)

B.1. Généralités

On se donne deux courbes planes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . On cherche la distance entre ces deux courbes définie par

$$d_0 = \min_{(M_1, M_2) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2} M_1 M_2, \quad (14)$$

aussi donnée par

$$d_0 = \sqrt{\min_{(M_1, M_2) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2} M_1 M_2^2}. \quad (15)$$

On supposera ces deux courbes dérivables en tout point.

Remarque B.1. Pour simplifier nous supposerons ces deux courbes disjointes et bornées et nous supposerons que nous serons dans le cas où ce minimum est non nul et atteint au moins en un couple de point (M_1^0, M_2^0) de $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$, chacun d'eux n'étant pas au bord de la courbe correspondante.

Remarque B.2. Il serait pertinent de voir si on peut s'affranchir de ces hypothèses et de montrer, par la suite, que cette hypothèse est vraie, sans avoir à vérifier les hypothèses de la remarque B.7, notamment en utilisant les aspects convexes des courbes étudiées.

On a alors le résultat important, similaire au résultat de projection sur un convexe :

Lemme B.3. *La droite $(M_1^0 M_2^0)$ est perpendiculaire aux deux droites, \mathcal{D}_1^0 et \mathcal{D}_2^0 , tangentes respectives*

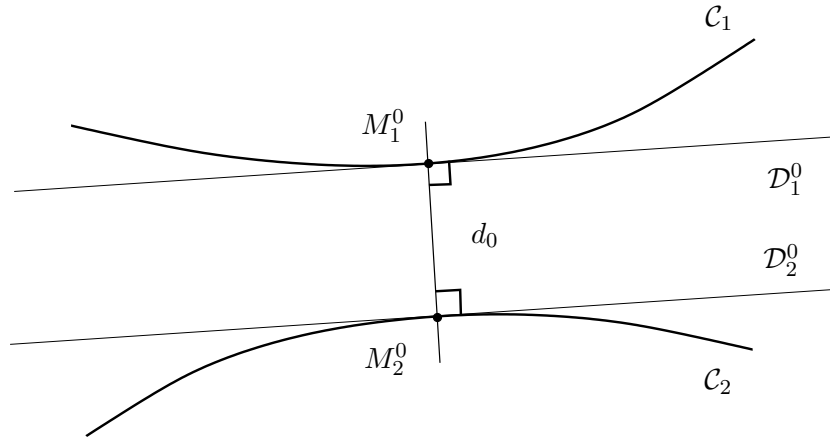


FIGURE 14. La distance d_0 entre les deux courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

aux deux courbes aux points M_1^0 et M_2^0 . Voir figure 14.

Démonstration. Montrons par exemple que la droite $(M_1^0 M_2^0)$ est perpendiculaire à \mathcal{D}_2^0 . Plusieurs niveaux de preuve peuvent être proposés.

(1)

Plaçons-nous tout d'abord à un niveau élémentaire et donnons une idée de la preuve. On

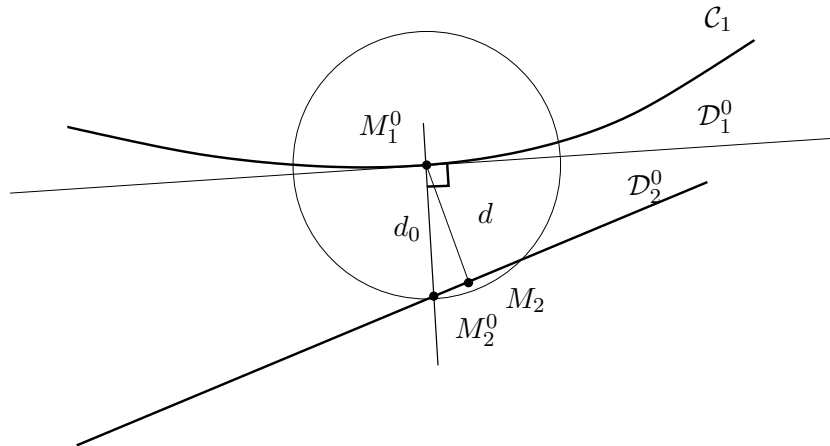


FIGURE 15. La distance d_0 entre les deux courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , portée par la droite \mathcal{D}_2^0 . On suppose que $(M_1^0 M_2^0)$ n'est pas perpendiculaire à \mathcal{D}_2^0 .

raisonne par l'absurde et on suppose que $(M_1^0 M_2^0)$ n'est pas perpendiculaire à \mathcal{D}_2^0 . On peut tout d'abord supposer que la courbe \mathcal{C}_2 est un segment de droite, porté donc par la droite \mathcal{D}_2^0 . Voir figure 15. Si par exemple, l'angle de droite est strictement inférieur à $\pi/2$, on peut donc construire un point M_2 de la droite qui soit à une distance d strictement plus petite que la

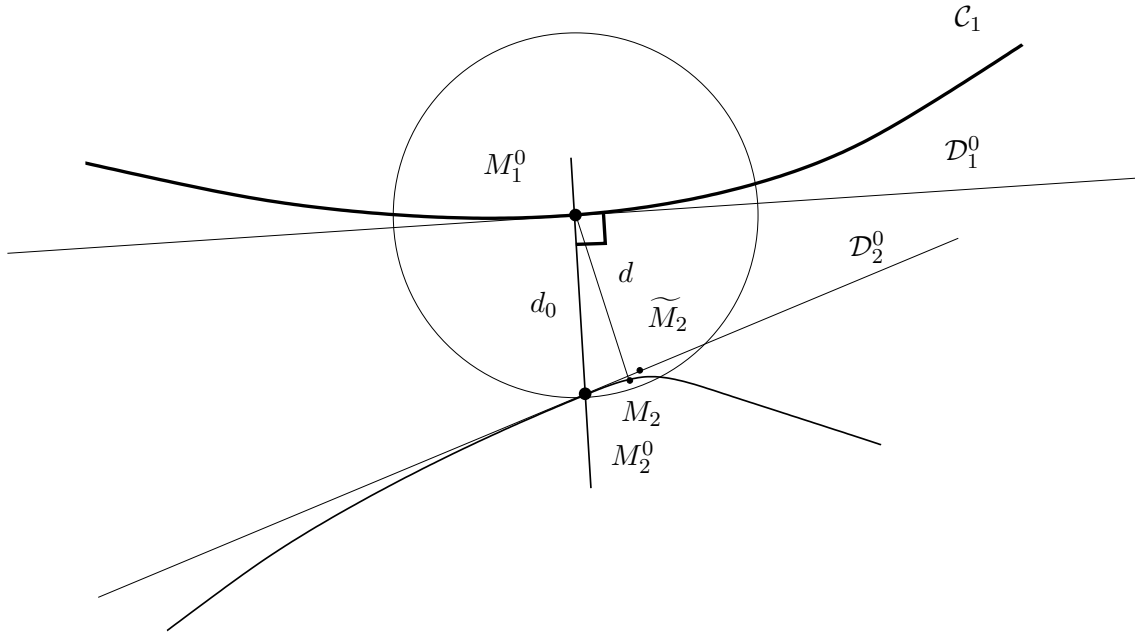


FIGURE 16. La distance d_0 entre les deux courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . On suppose que $(M_1^0 M_2^0)$ n'est pas perpendiculaire à \mathcal{D}_2^0 .

distance d_0 , ce qui contredit son aspect minimal. Dans le cas général, dans le cas de figure qui précède, on peut construire un point \widetilde{M}_2 de la tangente \mathcal{D}_2^0 , suffisamment proche d'un point M_2 de la courbe, ce point M_2 étant à l'intérieur strictement du cercle de centre M_1^0 et de rayon d_0 . En effet, si cela n'était pas possible, pour tout point \widetilde{M}_2 de la tangente \mathcal{D}_2^0 , pour tous les points suffisamment proche d'un point M_2 de la courbe, ce point M_2 serait à l'extérieur du cercle. En faisant tendre \widetilde{M}_2 vers M_2^0 , M_2 tendrait aussi vers M_2^0 , en étant sur la tangente à la courbe, qui ferait donc un angle strictement supérieur ou égal à $\pi/2$. Or, le point M_2 étant à l'intérieur strictement du cercle de centre M_1^0 et de rayon d_0 , on a donc trouvé un point M_2 de la courbe, à une distance strictement inférieure à d_0 , ce qui contredit de nouveau son aspect minimal.

(2)

À un niveau supérieur, on peut montrer cela plus rigoureusement, en utilisant le calcul différentiel. On supposera que l'on a un paramétrage de la courbe \mathcal{C}_1 avec une fonction F_1 d'un intervalle $I_1 = [a, b]$ de \mathbb{R} . Il en est de même pour \mathcal{C}_2 . Par abus de notation, on confondra M_1 et $F_1(t_1)$. De même, puisque la courbe \mathcal{C}_1 est dérivable, on notera abusivement, au voisinage de t_1^0 , correspondant à M_1^0 , la formule de Taylor sous la forme

$$\overrightarrow{M_1^0 M_1} = \lambda \vec{T}_1 + o(\lambda), \quad (16)$$

où $\lambda = t_1 - t_1^0$ tend vers zéro, en changeant de signe quand M_1 tend vers M_1^0 et en étant non nul si M_1 est différent de M_1^0 ; \vec{T}_1 est la tangente¹ unitaire à la courbe \mathcal{C}_1 en M_1^0 . Voir figure

1. cela est possible si la première dérivée est non nulle; sinon, il faut adapter le raisonnement.

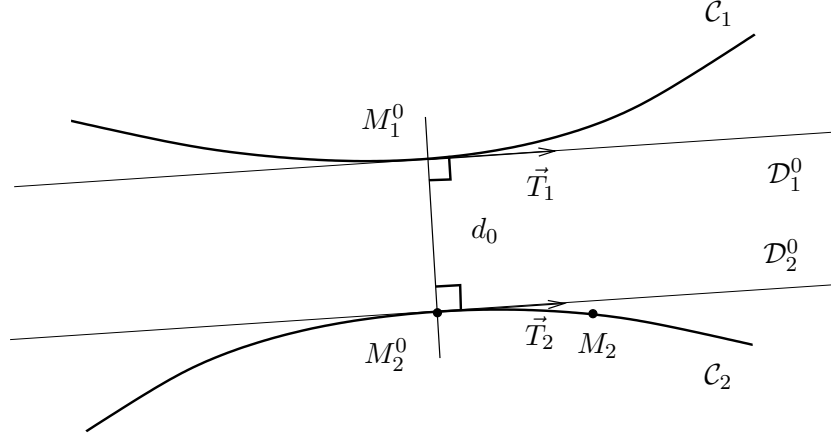


FIGURE 17. La distance d_0 entre les deux courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 et un point M_2 de la courbe \mathcal{C}_2 .

17. De même, on aura

$$\overrightarrow{M_2^0 M_2} = \mu \vec{T}_2 + o(\mu). \quad (17)$$

Par hypothèse, pour tout couple (M_1, M_2) de $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$, on a

$$(M_1 M_2)^2 \geq (M_1^0 M_2^0)^2.$$

Fixons par exemple $M_1 = M_1^0$. On a donc pour tout M_2 de \mathcal{C}_2

$$(M_1^0 M_2)^2 \geq (M_1^0 M_2^0)^2,$$

soit encore successivement

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{M_1^0 M_2} \right)^2 \geq (M_1^0 M_2^0)^2 &\iff \left(\overrightarrow{M_1^0 M_2^0} + \overrightarrow{M_2^0 M_2} \right)^2 \geq (M_1^0 M_2^0)^2, \\ &\iff \left(\overrightarrow{M_1^0 M_2^0} + \overrightarrow{M_2^0 M_2} \right)^2 \geq (M_1^0 M_2^0)^2, \\ &\iff (M_1^0 M_2^0)^2 + (M_2^0 M_2)^2 + 2 \overrightarrow{M_1^0 M_2^0} \cdot \overrightarrow{M_2^0 M_2} \geq (M_1^0 M_2^0)^2, \\ &\iff (M_2^0 M_2)^2 + 2 \overrightarrow{M_1^0 M_2^0} \cdot \overrightarrow{M_2^0 M_2} \geq 0, \end{aligned}$$

et en utilisant (17)

$$\begin{aligned} &\iff \left(\mu \vec{T}_2 + o(\mu) \right)^2 + 2 \overrightarrow{M_1^0 M_2^0} \cdot \left(\mu \vec{T}_2 + o(\mu) \right) \geq 0, \\ &\iff 2 \mu \overrightarrow{M_1^0 M_2^0} \cdot \vec{T}_2 + o(\mu) \geq 0, \\ &\iff \mu \left(\overrightarrow{M_1^0 M_2^0} \cdot \vec{T}_2 + o(1) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$\mu \left(\overrightarrow{M_1^0 M_2^0} \cdot \vec{T}_2 + o(1) \right) \geq 0.$$

Cela est vrai pour tout $\mu \neq 0$, qui peut changer de signe. On applique cela pour $\mu > 0$ et $\mu < 0$ et on a donc

$$\overrightarrow{M_1^0 M_2^0} \cdot \vec{T}_2 + o(1) \geq 0 \text{ et } \overrightarrow{M_1^0 M_2^0} \cdot \vec{T}_2 + o(1) \leq 0.$$

À la limite μ tendant vers zéro, on a donc

$$\overrightarrow{M_1^0 M_2^0} \cdot \vec{T}_2 \geq 0 \text{ et } \overrightarrow{M_1^0 M_2^0} \cdot \vec{T}_2 \leq 0,$$

et donc

$$\overrightarrow{M_1^0 M_2^0} \cdot \vec{T}_2 = 0. \quad (18)$$

Si la distance d_0 est non nulle, alors $\overrightarrow{M_1^0 M_2^0}$ est non nul et donc la droite $(M_1^0 M_2^0)$ est perpendiculaire à \mathcal{D}_2^0 .

- (3) On peut encore montrer cela plus rapidement en utilisant le calcul différentiel. La fonction de $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ dans \mathbb{R} , $(M_1, M_2) \mapsto M_1 M_2^2$ est différentiable (puisque les courbes sont dérivables et que le carré de la distance est différentiable). D'après les hypothèses de la remarque B.1, sa différentielle est nulle. Or

$$\begin{aligned} d(M_1 M_2^2) &= d\left(\left(\overrightarrow{M_1 M_2}\right)^2\right), \\ &= \overrightarrow{M_1 M_2} \cdot d\left(\overrightarrow{M_1 M_2}\right), \\ &= \overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \left(d\left(\overrightarrow{M_2^0 M_2}\right) - d\left(\overrightarrow{M_1^0 M_1}\right)\right). \end{aligned}$$

On suppose que $M_1^0 = M_1$ et donc $d\left(\overrightarrow{M_1^0 M_1}\right) = 0$ et ainsi

$$d(M_1 M_2^2) = \overrightarrow{M_1 M_2} \cdot d\left(\overrightarrow{M_2^0 M_2}\right)$$

D'après la dérivabilité de la courbe \mathcal{C}_2 on a en $M_2 = M_2^0$ $d\left(\overrightarrow{M_2^0 M_2}\right) = \lambda_0 \vec{T}_2$, où λ_0 est supposé non nul (sinon, il faut passer par la première différentielle non nulle en supposant qu'elle existe) et donc la nullité de la différentielle en $M_2 = M_2^0$ nous redonne (18) et on conclue de la même façon.

□

B.2. Cas particuliers : droites, cercles et paraboles

On suppose maintenant que chacune des deux courbes est soit une droite, soit un cercle, soit une parabole. On peut facilement éliminer le cas où les deux courbes sont sécantes, cas que l'on écarte donc. Ainsi, l'hypothèse de la remarque B.1 est vraie.

B.2.1. Cas particulier : droite et droite ou cercle et cercle.

Le cas de deux droites non sécantes correspond à deux droites parallèles. Le cas de deux cercles non sécants se ramène à l'étude de la position relative des centres par rapport à leur rayon et le couple de point $(M_1^0 M_2^0)$ est unique sauf si les deux cercles ont le même centre.

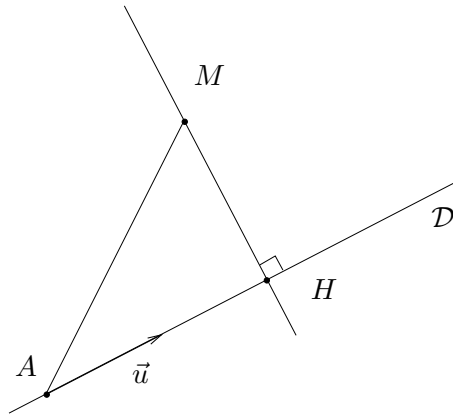


FIGURE 18. La distance entre une droite et un point.

B.2.2. Cas particulier : droites et cercles.

Avant de traiter le cas cercle-droite, donnons le lemme suivant (voir figure 18) :

Lemme B.4. *La distance d_0 entre la droite \mathcal{D} et le point M est la distance MH où M est le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} . Si la droite \mathcal{D} passe par A et a pour vecteur directeur le vecteur \vec{u} , alors d_0 est donné par :*

$$d_0 = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}. \quad (19)$$

Démonstration. Le premier point est immédiat. Pour démontrer le second, remarquons que

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{AH} + \vec{u} \wedge \overrightarrow{HM}$$

Puisque A et H sont sur la droite portée par \vec{u} , le premier terme du second membre est nul ; puisque (HM) est perpendiculaire à \vec{u} , la valeur absolue du second terme est égale à $\|\vec{u}\| HM = \|\vec{u}\| d_0$. On peut donc conclure. \square

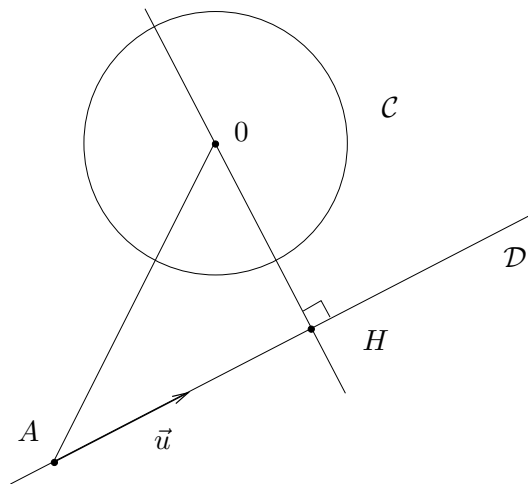


FIGURE 19. La distance entre une droite et un cercle.

Dans le cas d'une droite et d'un cercle disjoints, l'hypothèse de la remarque B.1 est vraie et le couple de point $(M_1^0 M_2^0)$ est unique. On peut donc en déduire la construction géométrique et le calcul de la distance entre le cercle \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} . Voir figure 19. On projette orthogonalement le centre O du cercle sur \mathcal{D} et $d_0 = \tilde{d}_0 - R$ où \tilde{d}_0 est la distance entre O et \mathcal{D} et R le rayon du cercle.

B.2.3. Cas particulier : paraboles et droites.

On peut encore traiter encore ce cas de façon géométrique et donner l'expression analytique exacte (non fournie ici, mais se déduit facilement de la construction). Là encore, on peut facilement discriminer le cas où les deux courbes sont sécantes, cas que l'on écarte donc. Ainsi, l'hypothèse de la remarque B.1 est vraie.

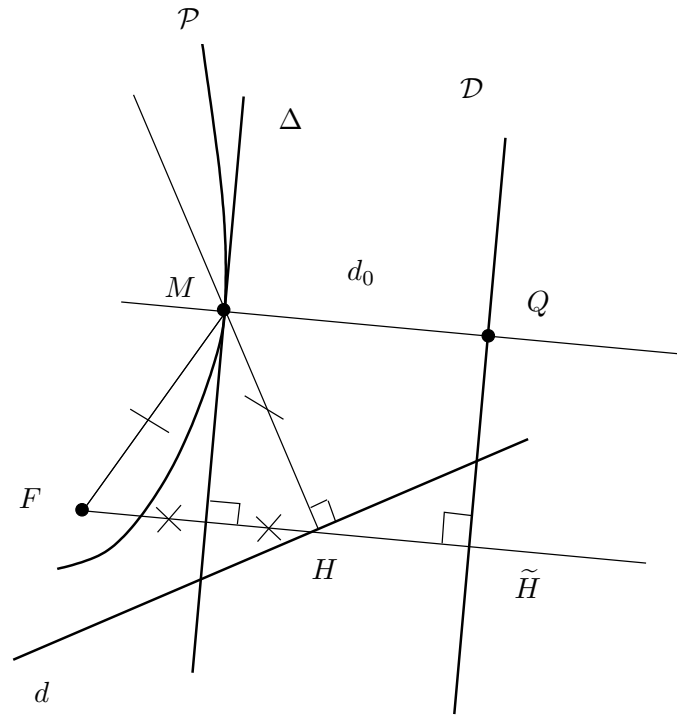


FIGURE 20. La distance entre la droite \mathcal{D} et la parabole \mathcal{P} .

On admet que l'hypothèse de la remarque B.1 est vraie et que l'hypothèse de convexité assure l'unicité du couple $(M_1^0 M_2^0)$. En fait, la construction géométrique faite par la suite assure *a posteriori* l'existence et l'unicité de ce couple.

On rappelle que la parabole \mathcal{P} de foyer F et de directrice d est l'ensemble des points du plan à égale distance de d et de F . On rappelle aussi que la tangente Δ à la parabole en M est la médiatrice $[FH]$, où H est le projeté orthogonal de M sur d . Voir figure 20 et par exemple [LH97 ; Bas16a].

Supposons la construction réalisée et raisonnons donc par condition nécessaire. D'après le lemme B.3, la droite Δ et la droite \mathcal{D} sont toutes les deux perpendiculaire à une même droite donc sont parallèle. Remarquons ainsi que l'on se trouve en fait dans le cas de la construction d'une tangente à une parabole de direction donnée [LH97, section 532 p. 347]. Or la droite Δ est perpendiculaire à (FH) donc \mathcal{D} est perpendiculaire à (FH) . Ainsi, la droite (FH) passe nécessairement par F et est perpendiculaire à \mathcal{D} et est unique.

Réciproquement, on construit la droite perpendiculaire à la droite \mathcal{D} donnée passant par le foyer F . Cette droite n'est pas parallèle à la directrice d de la parabole (sinon la parabole et la droite sont sécantes, cas que l'on a écarté). Ainsi cette droite coupe d en un unique point H . Il ne reste plus qu'à construire l'unique point M de la parabole en traçant l'intersection de la médiatrice Δ de $[FH]$ et de la droite perpendiculaire à d passant par H . L'unique intersection de (FH) avec \mathcal{D} est notée \tilde{H} . Enfin, on note Q l'unique intersection de la droite passant par M et perpendiculaire à \mathcal{D} . La droite Δ est donc la tangente à la parabole au point de contact M . Ainsi, (MQ) est simultanément perpendiculaire à Δ et \mathcal{D} . C'est donc en ce couple de point que la distance d_0 est atteinte.

Ce raisonnement par condition nécessaire et suffisante assure donc aussi l'existence et l'unicité du couple de point $(M_1^0 M_2^0)$ où la distance minimale est atteinte.

B.2.4. Cas particulier : paraboles et cercles.

Comme précédemment, avant de donner le cas parabole et cercle, traitons le cas de la distance entre une parabole et un point. On se donne une parabole d'équation $y = \alpha x^2$ (écrite dans un repère adapté) et un point $A(a, b)$, supposé ne pas appartenir à parabole. Par convexité, on peut montrer que la distance minimale entre la parabole et le point est atteint en un seul point si le point est à l'extérieur de la parabole (la partie du plan qui ne contient pas son foyer) ou si l'est à l'intérieur, sauf sur l'axe de la parabole. Dans ce dernier cas, il y a deux positions symétriques par rapport à l'axe.

On paramètre la parabole par $t \mapsto M(t) = (t, \alpha t^2)$. En raisonnant comme dans la section B.1, on peut montrer que la distance minimale est atteinte quand la distance $(M(t)A)^2$ a sa dérivée par rapport à t nulle. Or

$$\begin{aligned} (M(t)A)^2 &= (t - a)^2 + (\alpha t^2 - b)^2, \\ &= t^2 - 2at + a^2 + \alpha^2 t^4 - 2b\alpha t^2 + b^2 \end{aligned}$$

et donc

$$(M(t)A)^2 = \alpha^2 t^4 + (1 - 2b\alpha)t^2 - 2at + a^2 + b^2 \quad (20)$$

et

$$\frac{d}{dt}(M(t)A)^2 = 3\alpha^2 t^3 + 2(1 - 2b\alpha)t - 2a. \quad (21)$$

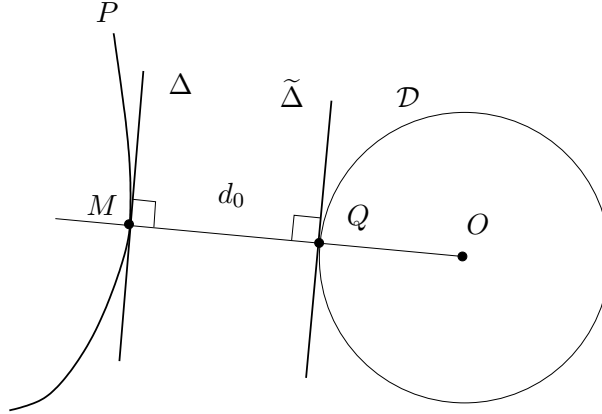
La valeur recherchée du paramètre t correspond à la résolution de

$$3\alpha^2 t^3 + 2(1 - 2b\alpha)t - 2a = 0. \quad (22)$$

Cette solution existe car $3\alpha^2 > 0$ et le polynôme de degré trois admet donc au moins une solution. Elle est unique sauf dans le cas où le point est à l'intérieur et sur l'axe de la parabole, ce qui fournit trois valeurs de t . On choisira celle qui correspond à la distance la plus petite. On reporte ensuite la valeur de t , calculable analytiquement, dans (20).

Remarque B.5. Remarquons le fait que cette équation soit de degré 3 empêche cette fois-ci une construction géométrique, à la règle et au compas, comme précédemment de la distance. Voir [Car89].

On suppose que M décrit la parabole \mathcal{P} et Q décrit le cercle \mathcal{C} , de centre O . Voir figure 21. Nécessairement le point Q appartient à $[OM]$ et $OM = OQ + QM = R + QM$ où R est le rayon du cercle. Ainsi minimiser QM revient à minimiser $OM - R$ et donc à minimiser OM . Dans ce cas, le point M correspond donc à la distance minimale entre la parabole et O , que l'on sait construire. On peut donc construire M , en un ou deux exemplaires, puis Q comme intersection de \mathcal{C} et de (OM) . Il existe deux solutions pour Q : on choisit celle correspondant à la distance la plus petite. Les deux tangentes

FIGURE 21. La distance entre le cercle \mathcal{C} et la parabole \mathcal{P} .

à la paraboles et aux cercles sont les droites perpendiculaire à (OM) passant respectivement par M et Q . Cette construction n'est donc pas non plus possible de façon géométrique.

B.2.5. Cas particulier : paraboles et paraboles.

Ce dernier cas est le plus complexe.

On suppose que les deux paraboles sont disjointes. Remarquons tout d'abord que le couple de point (M_1^0, M_2^0) n'est pas nécessairement unique. Dans la cas où les deux paraboles ont le même axe, il y a une infinité de couples, que l'on peut facilement déterminer. On écarte donc ce cas là. Si, maintenant l'une des parabole est incluse dans la partie extérieure à l'autre, alors on peut montrer par convexité que le couple de point est unique. En fait, si les deux paraboles sont disjointes et avec axe distinct, on est nécessairement dans ce cas. Ainsi, l'hypothèse de la remarque B.1 est vraie et on a l'unicité du couple (M_1^0, M_2^0) . On peut montrer, comme dans la remarque B.5 que la construction n'est pas possible à la règle et au compas.

Il ne reste donc que le calcul. On peut paramétrer de façon polynomiale aisément chacune des deux paraboles par $t_1 \mapsto M_1(t_1) = (x_1, y_1)$ et $t_2 \mapsto M_2(t_2) = (x_2, y_2)$. Il faut donc minimiser la fonction F définie sur un pavé de \mathbb{R}^2 donnée par

$$F(t_1, t_2) = M_1 M_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad (23)$$

Cette fonction est relativement aisée à déterminer. Elle est différentiable. On en déduit ses dérivées partielles et son minimum est atteint en l'unique couple (t_1, t_2) tel que

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = \frac{\partial F}{\partial t_2} = 0 \quad (24)$$

ce qui fournit un système de deux équations polynomiale à deux inconnues, malheureusement non explicitement résolvable dans le cas général. On peut donc utiliser des méthodes numériques, comme la méthode de Newton, ici implémentable car la fonction est différentiable. On peut aussi chercher le minimum directement de la fonction définie par (23), pour lesquels il existe des schémas numériques, tels le gradient conjugué ou d'autres implémentés sous Matlab.

Au lieu d'utiliser (24), on pourrait être tenté d'utiliser la propriété B.3, qui se traduirait par deux équations

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{T}_1 = \overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{T}_2 = 0, \quad (25)$$

mais nécessairement équivalentes aux précédentes !

Voir plus de détails en section B.4.

Remarque B.6. Il resterait à étudier si l'on peut expliciter analytiquement la solution, en étudiant par exemple les nombreux cas donnés dans [Sha05], ce que je ne crois pas, puisque les degrés des équations obtenues sont trop élevés.

B.3. Applications aux circuits de train

Concluons par une application intéressante² sur les circuits de trains, évoqués dans [Bas12; Bas16a].

Pour étudier la possibilité d'avoir deux pièces occupant le même carré, on peut montrer que l'on est soit dans un cas où deux extrémités sont confondues, ce qui correspond à un aiguillage, soit dans un cas montré en figure 6(a), ce qui correspond à un croisement ou un point, soit dans un cas constructible, montré en figure 6(b). Pour plus de détails, voir [Bas16c].

Voir résultats de la section 3.

Informatiquement, les hypothèses de la remarque B.1 ont été vérifiées en faisant un balayage sur tous les couples possibles de courbes ce qui représente 1600 cas à étudier. Nous avons déterminé le couple de courbes qui correspond à la plus petite distance δ possible, donnée par (dans le cas d'un carré de longueur unité) :

$$\delta_{\min} = 0.20711, \quad (26)$$

qui correspond à la configuration de la figure 6(b). Cette expression est égale à

$$\delta_{\min} = \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1), \quad (27)$$

ce qui correspond à la distance entre un cercle et une droite. Par construction des bords et par les propriétés de perpendicularité vues, à distance constante égale à la demi-largeur $e/2$ du rail, deux rails seront disjoints si et seulement si

$$\delta_{\min} \geq e. \quad (28)$$

Si, maintenant, contrairement à ce que l'on a étudié dans [Bas16c], on rajoute la petite parabole pour la pièce 6, on constate que les dimensions choisies, conforme à celle des rails Brio, ne permettent plus de faire passer dans le même carré une petite parabole et la grande pièce droite, comme le montre la figure 7(a), cas qui correspond à la distance entre deux paraboles.

Enfin, si on choisit cette fois-ci la pièce 6 comme étant optimale, de nouveau on peut passer dans le même carré deux pièces, comme le montre la figure 7(b).

Voir plus de détails en section B.4 et B.5.

Remarque B.7. Il serait intéressant d'essayer de montrer de façon non informatique que l'ensemble des hypothèses de la remarque B.1 est vraie, mais cela dépasse mes compétences !

B.4. Retour sur la distance entre deux paraboles

On peut paramétrer chacune des deux équations des deux paraboles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , où chacune d'elles est respectivement définie par une courbe de Bezier par les points de contrôle A_i , B_i et C_i , $1 \leq i \leq 2$

2. à mes yeux ...

de la façon suivante :

$$\begin{aligned} M_1(t_1) &= (x_1, y_1) = t_1^2 A_1 + 2t_1(1-t_1)B_1 + (1-t_1)^2 C_1, \\ M_2(t_2) &= (x_2, y_2) = t_2^2 A_2 + 2t_2(1-t_2)B_2 + (1-t_2)^2 C_2. \end{aligned}$$

Il faut donc minimiser la fonction F définie sur un pavé de \mathbb{R}^2 donnée par

$$F(t_1, t_2) = M_1 M_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad (29)$$

Son minimum est atteint au couple de point $M_1 M_2 (t_1, t_2)$ tel que

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = \frac{\partial F}{\partial t_2} = 0. \quad (30)$$

Notons que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial t_1} (M_1 M_2^2) = 2 \overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \frac{\partial(\overrightarrow{M_1 M_2})}{\partial t_1} = 2 \overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \frac{\partial(\overrightarrow{O M_1})}{\partial t_1},$$

et une équation similaire en t_2 et donc que finalement, (30) est équivalente à

$$2 \overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \frac{\partial(\overrightarrow{O M_1})}{\partial t_1} = 0, \quad (31a)$$

$$2 \overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \frac{\partial(\overrightarrow{O M_2})}{\partial t_2} = 0, \quad (31b)$$

ce qui montre qu'au point où la distance est minimale (et si elle est non nulle), alors $(M_1 M_2)$ est orthogonale à la tangente en la courbe \mathcal{C}_1 au point M_1 et à la tangente en la courbe \mathcal{C}_2 au point M_2 . Ces équations fournissent un système de deux équations polynomiale en t_1 et t_2 du type

$$P_1(t_1, t_2) = 0, \quad (32a)$$

$$P_2(t_1, t_2) = 0. \quad (32b)$$

Plus précisément, P_1 est de degré 3 en t_1 et 2 en t_2 tandis que P_2 est de degré 2 en t_1 et 3 en t_2 . Il existe deux matrices $D_1 \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ et $D_2 \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ telles que

$$P_1(t_1, t_2) = t \begin{pmatrix} 1 \\ t_1 \\ t_1^2 \\ t_1^3 \end{pmatrix} D_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t_2 \\ t_2^2 \end{pmatrix}, \quad (33a)$$

$$P_2(t_1, t_2) = t \begin{pmatrix} 1 \\ t_1 \\ t_1^2 \end{pmatrix} D_2 \begin{pmatrix} 1 \\ t_2 \\ t_2^2 \\ t_2^3 \end{pmatrix}. \quad (33b)$$

Pour toute la suite, nous désignerons le polynôme en la variable X ,

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0,$$

par ses coefficients dans l'ordre de la plus haute à la plus basse puissance :

$$P = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$$

Dans le cas particulier où les points A_i, B_i, C_i sont donnés par

$$A_1 = (0, 1/2), \quad (34a)$$

$$B_1 = (0, 0), \quad (34b)$$

$$C_1 = (1/2, -1/2), \quad (34c)$$

$$A_2 = (1/2, 0), \quad (34d)$$

$$B_2 = (0, 0), \quad (34e)$$

$$C_2 = (1/2, 1/2), \quad (34f)$$

on obtient les deux matrices D_1 et D_2 données par

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (35a)$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (35b)$$

On peut résoudre avec Matlab symbolique le système (32) et on obtient alors 9 solutions en t_1 et 9 solutions en t_2 . On ne retient que celles correspondant à t_1 et t_2 réels et dans l'intervalle $]0, 1[$ ce qui ne fournit qu'une seule solution. Les deux valeurs de t_1 et t_2 sont données par

$$t_1 = 0.4878159608695014560857743843171, \quad (36a)$$

$$t_2 = 0.40195899364296065925257315956310. \quad (36b)$$

En ce point la distance M_1M_2 vaut

$$d = 0.15647016527813015600949841643471. \quad (37)$$

Si on pose

$$\eta = \max(|P_1(t_1, t_2)|, |P_2(t_1, t_2)|), \quad (38)$$

qui doit être en théorie nul selon (32), on obtient

$$\eta = 1.0 \cdot 10^{-32}, \quad (39)$$

qui est bien numériquement nul.

La distance M_1M_2 atteinte est représentée sur la figure 22.

Grâce aux fonctions `fminunc` ou `fminsearch` de matlab, on peut aussi minimiser une fonction de deux variables et obtenir pour la première d'entre elles,

$$d = 0.15647016527814, \quad (40a)$$

$$\eta = 4.8600 \cdot 10^{-8}, \quad (40b)$$

et pour la seconde d'entre elles,

$$d = 0.15647016870925, \quad (41a)$$

$$\eta = 4.7359 \cdot 10^{-5}, \quad (41b)$$

ce qui est de moins bonne qualité que (39).

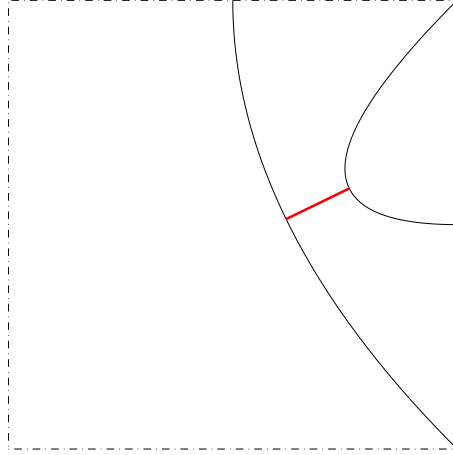


FIGURE 22. La distance M_1M_2 minimale correspondant aux deux paraboles définies par les points de contrôle (34).

En dernier lieu, on peut aussi tenter d'exprimer le système non linéaire (32) sous la forme de deux équations polynômiales, indépendantes, l'une en t_1 , l'autre en t_2 . Pour cela, pour abaisser les degrés 3 de P_1 en t_1 et 2 de P_2 en t_1 , on effectue de façon classique, en fixant le paramètre t_2 , la division euclidienne de P_1 par P_2 (par rapport à la variable t_1) sous la forme

$$P_1 = P_2Q_1 + R_1, \quad (42)$$

où nécessairement le degré de R_1 (par rapport à la variable t_1) est inférieur à un. Ainsi, (32) et (42) sont équivalentes à ((32) et (42)) et

$$R_1(t_1, t_2) = 0,$$

ce qui permet, si le degré de R_1 est exactement 1, de calculer t_1 en fonction de t_2 , sous la forme de fraction rationnelle

$$t_1 = \phi_1(t_2),$$

qui réinjectée dans (32b) permet d'obtenir finalement une équation polynomiale en t_2 . Notons que le numérateur de cette fraction est de degré 4 et son dénominateur est de degré 4 et qu'elle vaut

$$\phi_1 = \frac{(14, -16, 3, 2, -1)}{(2, -1, 10, -7, 2)}.$$

De même, on inverse les rôles : on effectue, en fixant le paramètre t_1 , la division euclidienne de P_2 par P_1 (par rapport à la variable t_2) sous la forme

$$P_2 = P_1Q_2 + R_2, \quad (43)$$

où nécessairement le degré de R_2 (par rapport à la variable t_2) est inférieur à un. Ainsi, (32) et (43) sont équivalentes à ((32) et (43)) et

$$R_2(t_1, t_2) = 0,$$

ce qui permet, si le degré de R_2 est exactement 1, de calculer t_2 en fonction de t_1 , sous la forme de fraction rationnelle

$$t_2 = \phi_2(t_1),$$

qui réinjectée dans (32a) permet d'obtenir finalement une équation polynomiale en t_1 . Notons que le numérateur de cette fraction est de degré 4 et son dénominateur est de degré 4 et qu'elle vaut

$$\phi_2 = \frac{(2, 2, -5, 12, -7)}{(2, 11, 8, -13, 8)}.$$

Le polynôme en t_1 , de degré 11 est donc donné par

$$\zeta_1 = (4, 44, 141, 100, -97, -51, -215, 91, 321, -329, 118, -15), \quad (44)$$

tandis que le polynôme en t_2 , de degré 11 est donné par

$$\zeta_2 = (20, -44, -207, 682, -427, -703, 1517, -1335, 683, -213, 38, -3) \quad (45)$$

On constate *a posteriori* que les deux polynômes donnés par (44) et (45) admettent $1/2$ comme racine, d'ordre $k_1 = 2$ pour ζ_1 et d'ordre $k_2 = 2$ pour ζ_2 . Après division respective par $(2t_1 - 1)^2$ et $(2t_2 - 1)^2$, on obtient finalement deux polynômes ξ_1 et ξ_2 de degrés respectifs 9 et 9 donnés par

$$\xi_1 = (1, 12, 47, 69, 33, 3, -59, -37, 58, -15), \quad (46a)$$

$$\xi_2 = (5, -6, -59, 113, 21, -183, 191, -97, 26, -3). \quad (46b)$$

On peut, comme précédemment, résoudre les deux équations polynomiales obtenues. On obtient alors une seule solution. Cela est confirmé par la figure 23 qui montre ξ_1 et ξ_2 (et les valeurs de t_1 et t_2) qui changent de signe entre 0 et 1 et dont les dérivées sont strictement positives sur $]0, 1[$. Les deux valeurs de t_1 et t_2 sont alors données par

$$t_1 = 0.48781596086950145608577438431711, \quad (47a)$$

$$t_2 = 0.40195899364296065925257315956310. \quad (47b)$$

En ce point la distance $M_1 M_2$ vaut

$$d = 0.15647016527813015600949841643471, \quad (48)$$

et si on calcule η défini par (38), on obtient

$$\eta = 1.0 \cdot 10^{-32}, \quad (49)$$

et on retrouve bien des valeurs proches de (36), (37) et (39).

On vérifie aussi qu'en $t_1 = t_2 = 1/2$, la distance d donnée par

$$d = 1/8 \sqrt{2} = 0.1767766953,$$

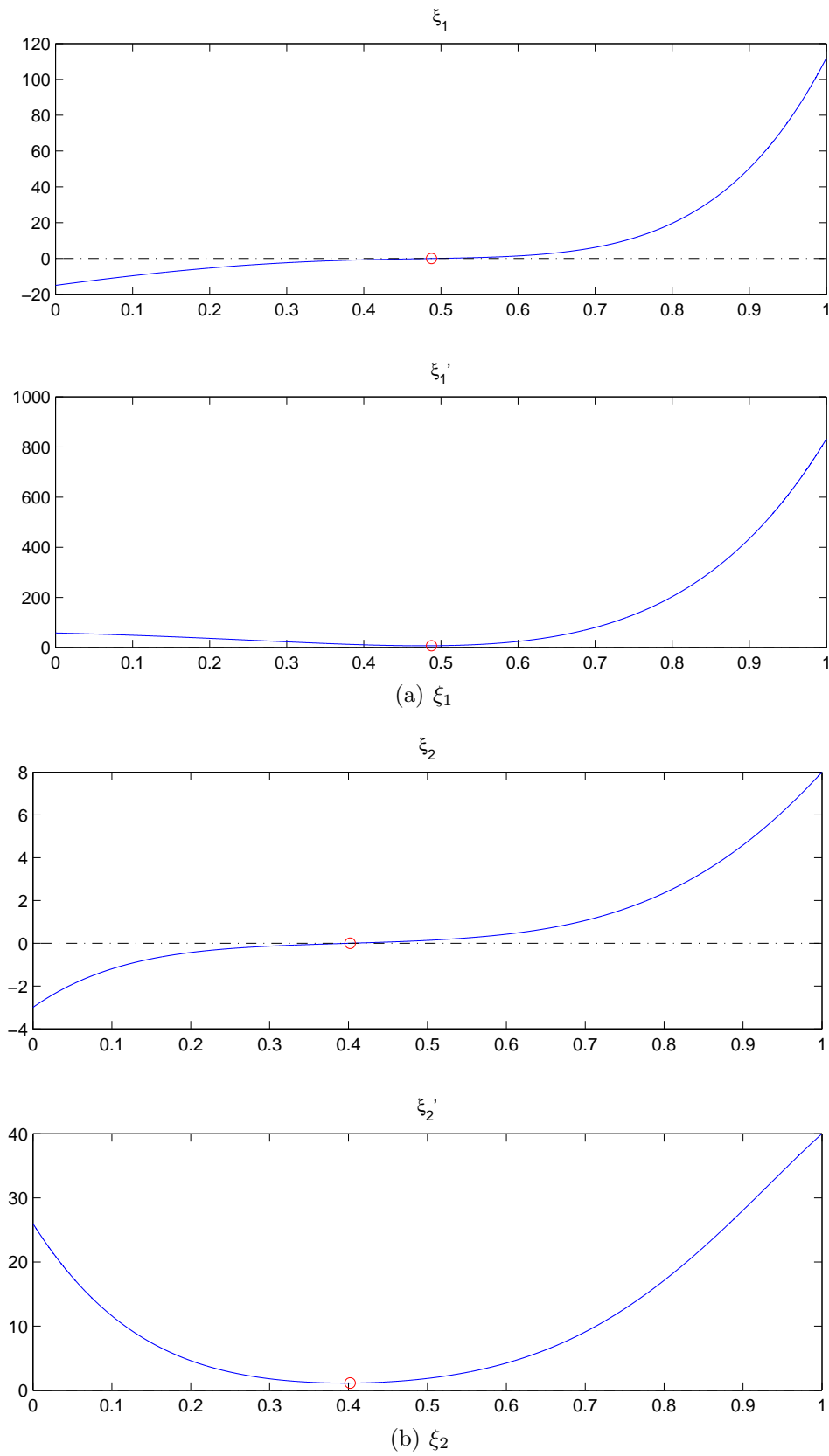
est supérieure à celle donnée par (37) et que le maximum des dérivée partielles donné

$$\eta = 0.1250000000,$$

est non nul, ce qui montre bien qu'en ce point le minimum n'est pas atteint.

Remarque B.8.

Attention, contrairement à ce que l'on croit voir sur la figure 23, les dérivées secondes de ξ_1 et ξ_2 en t_1 et t_2 ne sont pas nulles ! Elles y valent en effet respectivement 19.77015 et 0.79946. Voir aussi la figure 24.

FIGURE 23. Les polynômes ξ_1 et ξ_2 et leur dérivées sur $[0, 1]$.

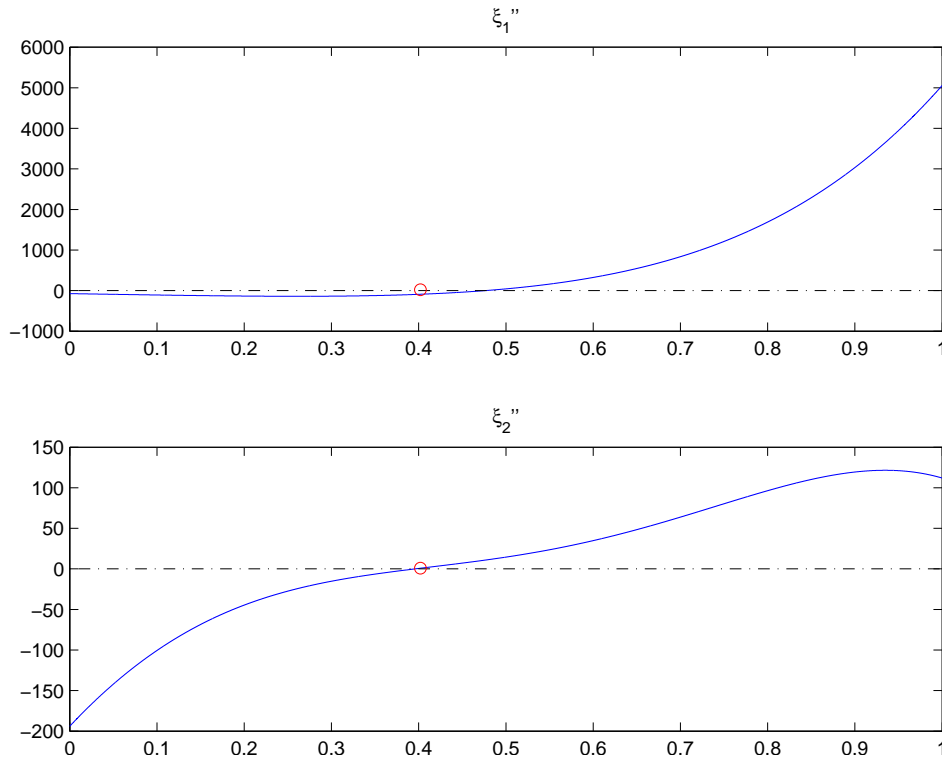


FIGURE 24. les deux dérivées secondes ξ_1'' et ξ_2'' sur $[0, 1]$.

Il s'avère en fait que le polynôme ξ_1 peut encore se décomposer dans $\mathbb{Q}[X]$ sous la forme

$$\xi_1 = Q_1 \mu_1,$$

où le polynôme

$$\mu_1 = (1, 4, 5, 5, 2, -3), \quad (50)$$

est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et Q_1 est un polynôme de degré 4, dont on peut déterminer explicitement les racines, sous forme de radicaux, et vérifier qu'elles ne sont pas dans $]0, 1[$. Les racines de ξ_1 dans l'intervalle $]0, 1[$ sont donc les racines de μ_1 dans ce même intervalle.

On peut vérifier sur la figure 25 que μ_1 n'a qu'une seule racine dans $]0, 1[$. Cela peut se démontrer rigoureusement car le degré de μ_1' est 4, est inférieur ou égal à 4. On peut donc expliciter les racines de μ_1' , montrer qu'elles ne sont pas dans $]0, 1[$ et conclure à l'unicité du zéro de μ_1 puisque $\mu_1(0)\mu_1(1) < 0$. Enfin, on détermine l'unique racine de $\mu_1 \in]0, 1[$ donnée par

$$t_1 = 0.48781596086950145608577438431711,$$

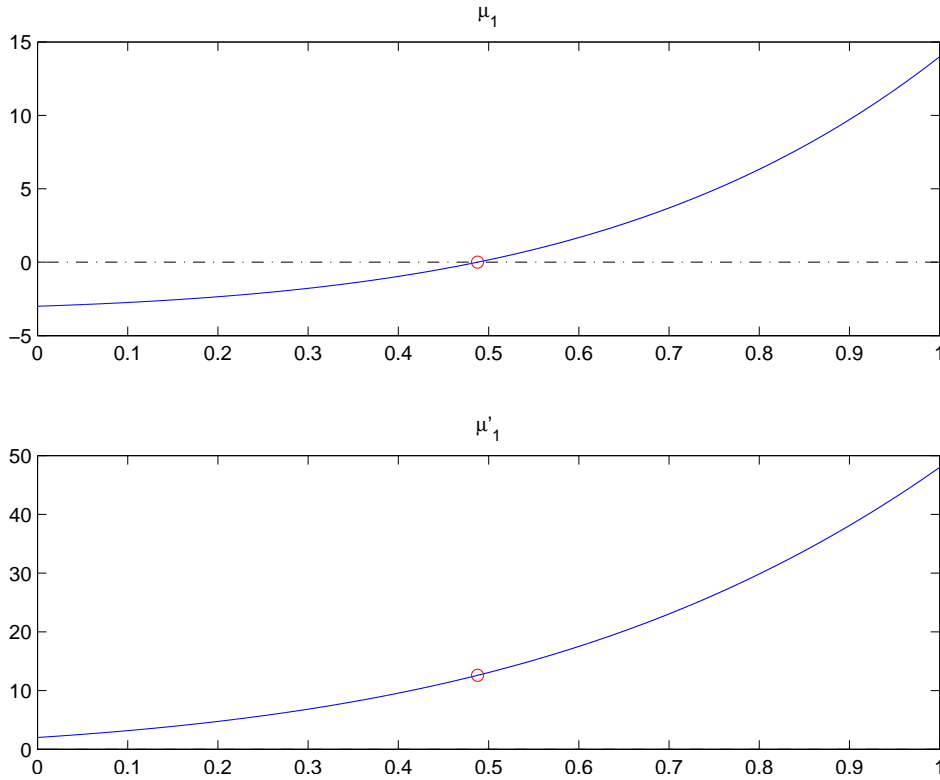
qui est bien égale à celle donnée par (47a). Notons que, puisque μ_1 est de degré 5, qui n'est pas de la forme 2^n où $n \in \mathbb{N}$, le point M_1 n'est pas constructible à la règle et au compas.

Il s'avère en fait que le polynôme ξ_2 peut encore se décomposer dans $\mathbb{Q}[X]$ sous la forme

$$\xi_2 = Q_2 \mu_2,$$

où le polynôme

$$\mu_2 = (5, -6, -9, 13, -6, 1), \quad (51)$$

FIGURE 25. Le polynôme μ_1 et sa dérivée sur $[0, 1]$.

est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et Q_2 est un polynôme de degré 4, dont on peut déterminer explicitement les racines, sous forme de radicaux, et vérifier qu'elles ne sont pas dans $]0, 1[$. Les racines de ξ_2 dans l'intervalle $]0, 1[$ sont donc les racines de μ_2 dans ce même intervalle.

On peut vérifier sur la figure 26 que μ_2 n'a qu'une seule racine dans $]0, 1[$. Cela peut se démontrer rigoureusement car le degré de μ'_2 est 4, est inférieur ou égal à 4. On peut donc expliciter les racines de μ'_2 , montrer qu'elles ne sont pas dans $]0, 1[$ et conclure à l'unicité du zéro de μ_2 puisque $\mu_2(0)\mu_2(1) < 0$. Enfin, on détermine l'unique racine de $\mu_2 \in]0, 1[$ donnée par

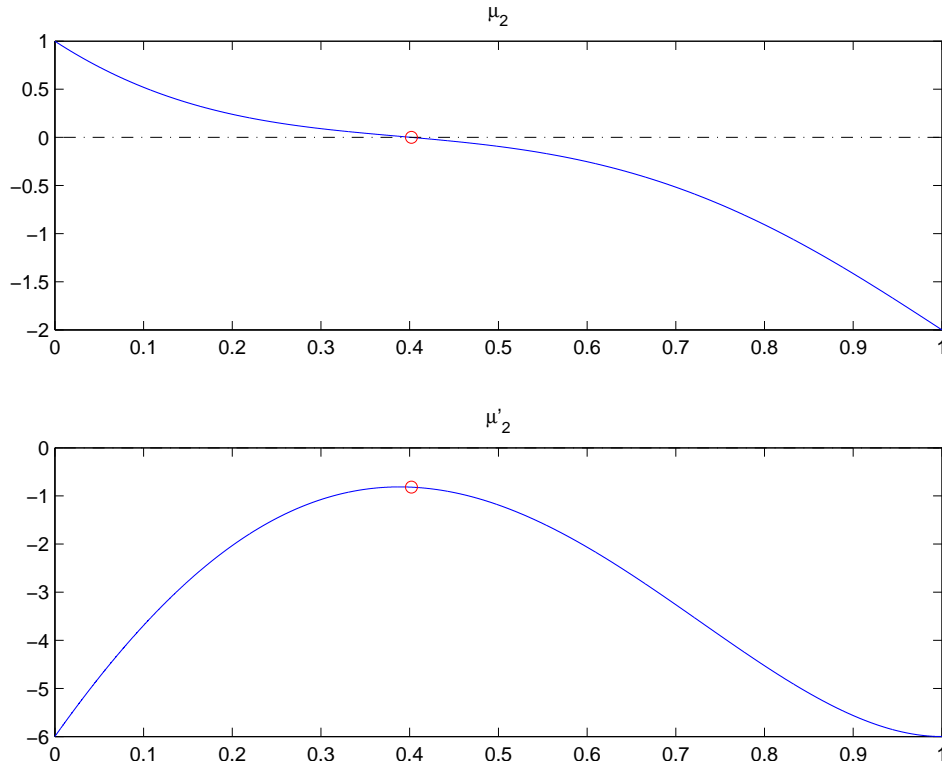
$$t_2 = 0.40195899364296065925257315956310,$$

qui est bien égale à celle donnée par (47b). Notons que, puisque μ_2 est de degré 5, qui n'est pas de la forme 2^n où $n \in \mathbb{N}$, le point M_2 n'est pas constructible à la règle et au compas.

B.5. Retour sur la distance entre une parabole et l'ensemble arc de cercle-segment de droite

On fait subir à cette courbe une réflexion et une rotation et on étudie la distance entre cette courbe et une parabole définie sous la forme de Bézier par les points de contrôle a , b et c de la façon suivante :

$$M(t) = (x, y) = t^2 a + 2t(1-t)b + (1-t)^2 c.$$

FIGURE 26. Le polynôme μ_2 et sa dérivée sur $[0, 1]$.

On s'intéresse tout d'abord à la distance entre cette parabole et le cercle défini ci-dessous. Il suffit alors de définir la distance entre cette parabole et le centre C du cercle en posant

$$P(t) = \|(x, y) - C\|^2,$$

qui est polynôme de degré 4 en t . La distance sera minimale ssi $P'(t) = 0$.

On se place dans le cas particulier où

$$a = (0, -1/2), \quad (52a)$$

$$b = (0, 0), \quad (52b)$$

$$c = (1/2, 1/2). \quad (52c)$$

Voir la figure 27. On obtient alors après calcul

$$P'(t) = t^3 + t - 2 + \sqrt{2}, \quad (53)$$

polynôme de degré trois dont on détermine les racines réelles. Il n'y en qu'une, égale à

$$t_0 = 1/6 \sqrt[3]{216 - 108\sqrt{2} + 12\sqrt{498 - 324\sqrt{2}}} - 2 \frac{1}{\sqrt[3]{216 - 108\sqrt{2} + 12\sqrt{498 - 324\sqrt{2}}}}, \quad (54)$$

soit numériquement

$$t_0 = 0.47715159497699502176824678782646. \quad (55)$$

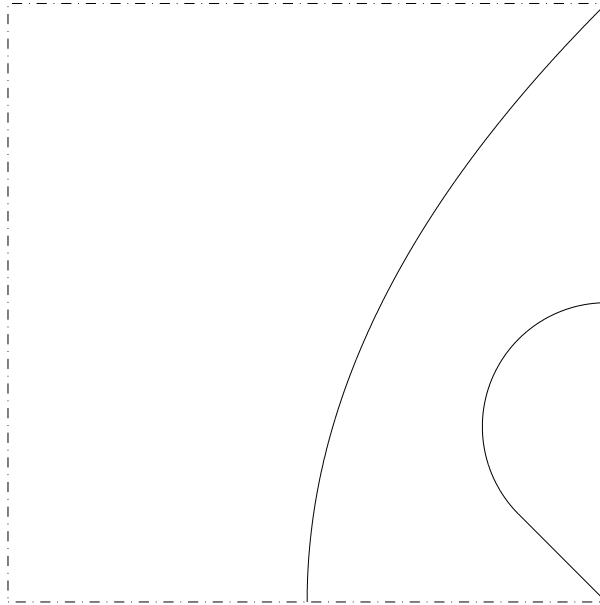


FIGURE 27. La description géométrique de la pièce 6 formée d'un arc de cercle et d'un segment de droite.

On vérifie alors que t est dans $]0, 1[$. On pose alors

$$d_0 = M(t_0)C - R, \tag{56}$$

soit

$$d_0 = \sqrt{\left(1/2 \left(1/6 \sqrt[3]{216 - 108\sqrt{2} + 12\sqrt{498 - 324\sqrt{2}}} - 2 \frac{1}{\sqrt[3]{216 - 108\sqrt{2} + 12\sqrt{498 - 324\sqrt{2}}}} - 1/2\right)^2 + \left(-1/2 \left(1 - 1/6 \sqrt[3]{216 - 108\sqrt{2} + 12\sqrt{498 - 324\sqrt{2}}}\right)\right)^2\right)} \tag{57}$$

soit numériquement

$$d_0 = 0.22076370038702427569798294836263. \tag{58}$$

On calcule ensuite alors la distance de $M(t_0)$ à chacune des extrémités de l'arc de cercle et du segment et on constate que ces distances sont strictement supérieures à d_0 , ce qui montre que la distance entre le point C et la réunion de l'arc de cercle et du segment est bien atteinte à l'intérieur de l'arc de cercle.

Voir la figure 28.

Références

- [Bas11] J. BASTIEN. *Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie*. Notes de cours de l'UV MT25 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MT25. 2011. 180 pages.
- [Bas12] J. BASTIEN. "Circuit apte à guider un véhicule miniature". FR2990627. UNIVERSITÉ LYON I. Brevet publié sur le site de l'INPI <http://bases-brevets.inpi.fr/fr/document/FR2990627.html?p=6&s=1423127185056&cHash=cfb2dad6>. Voir [Bas13]. 15 mai 2012.
- [Bas13] J. BASTIEN. "Circuit suitable for guiding a miniature vehicle [Circuit apte à guider un véhicule miniature]". WO2013171170. UNIVERSITÉ LYON I. Demande internationale publiée en vertu du traité de coopération en matière de brevets (PCT). Voir <http://bases-brevets.inpi.fr/fr/document/WO2013171170.html?p=6&s=1423127405077&cHash=6947975351b6d1cf7dd56d4e749a98bb>. 13 mai 2013.

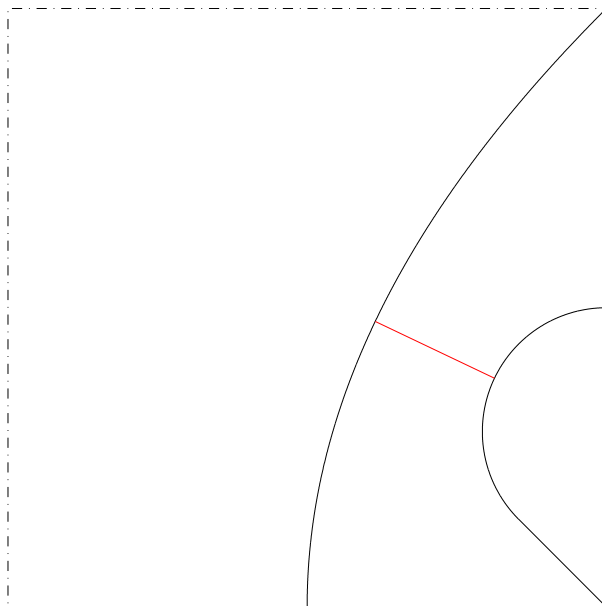


FIGURE 28. La description géométrique de la pièce 6 formée d'un arc de cercle et d'un segment de droite et la distance minimale.

- [Bas15a] J. BASTIEN. *Comment concevoir un circuit de train miniature qui se reboucle toujours bien ?* Transparents présentés lors du Forum des mathématiques 2015 à l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon, disponibles sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_forum_2015.pdf. 2015. 73 pages.
- [Bas15b] J. BASTIEN. *Comment concevoir un circuit de train miniature qui se reboucle toujours bien ? – Deux questions d'algèbre et de dénombrement.* Transparents présentés au « séminaire détente » de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique, Lyon, disponibles sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_MMI_2015.pdf. 2015. 80 pages.
- [Bas16a] J. BASTIEN. *Atelier Maths C2+ : Circuits de trains et paraboles.* MathC2+ à l'université Lyon I, disponible sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/parabole_circuit_train.pdf. 2016. 32 pages.
- [Bas16b] J. BASTIEN. *Construction and enumeration of circuits capable of guiding a miniature vehicle.* 2016. arXiv : 1603.08775.
- [Bas16c] J. BASTIEN. "Construction and enumeration of circuits capable of guiding a miniature vehicle". In : *Recreat. Math. Mag.* 3.6 (2016). Disponible sur http://rmm.ludus-opuscula.org/PDF_Files/RMM_Number6_December_2016_high.pdf, pages 5-42. DOI : 10.1515/rmm-2016-0006.
- [Bas17] J. BASTIEN. *Construction et énumération de circuits aptes à guider un véhicule miniature.* Traduction en français de [Bas16c], disponible sur http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/articles_provisoires/enumeration_circuit_JB_2016_fr.pdf. 2017.
- [Bas19] J. BASTIEN. *Existence d'une courbe à courbure positive maximisant le minimum du rayon de courbure – "Observation numérique".* 2019. arXiv : 1906.10010.
- [Bas21a] J. BASTIEN. *Catalogue de plans pour un système de rail breveté – avec la pièce 6 optimale.* Disponible sur : http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/catalogue_exhaustif_11rails_avec_piece6.pdf. 2021. 566 pages.
- [Bas21b] J. BASTIEN. *Existence et unicité d'une courbe à courbure positive maximisant le minimum du rayon de courbure.* 2021. arXiv : 2104.01143.
- [Car89] J.-C. CARREGA. *Théorie des corps. La règle et le compas. [Ruler and compass].* Second. Collection Formation des Enseignants et Formation Continue. [Collection on Teacher Education and Continuing Education].

Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 512.3 CAR, 4 ième étage). Hermann, Paris, 1989, pages xiv+277.

- [LH97] C. LEBOSSÉ et C. HÉMERY. *Géométrie. Classe de Mathématiques (Programmes de 1945)*. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 516 LEB 97307, niveau 0 Espace Capes/Agreg). Paris : Jacques Gabay, 1997.
- [Sha05] A. SHARMA. *Text Book Of Circles And Parabola*. Discovery Publishing House, 2005.

LABORATOIRE INTER-UNIVERSITAIRE DE BIOLOGIE DE LA MOTRICITÉ, POLYTECH, UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1, 15 BOULEVARD ANDRÉ LATARJET, 69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE
Email address: `jerome.bastien@univ-lyon1.fr`